

# Apostila

**Resistência dos Materiais Avançada**

Para mais apostilas acesse:

**[WWW.MEIACOLHER.COM](http://WWW.MEIACOLHER.COM)**

## SUMÁRIO

1. LISTA DE SÍMBOLOS.....	3
2. INTRODUÇÃO.....	4
3. TENSÕES NORMAIS - FUNDAMENTOS DA FLEXÃO.....	6
4. TENSÕES TANGENCIAIS – CISALHAMENTO TRANSVERSAL.....	25
5. TRANSFORMAÇÕES DAS TENSÕES – ESTADO PLANO (EPT) .....	40
6. TRANSFORMAÇÕES DAS DEFORMAÇÕES – ESTADO PLANO (EPD) .....	52
7. DESLOCAMENTOS EM VIGAS E EIXOS – LINHA ELÁSTICA.....	60
8. FLAMBAGEM DE COLUNAS .....	71
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	80

## 1. LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras maiúsculas

$A$  - área  
 $E$  - módulo de elasticidade longitudinal  
 $F$  - força  
 $I$  - momento de inércia  
 $L$  - comprimento  
 $M$  - momento fletor  
 $Q$  - momento estático  
 $N$  - força normal  
 $P$  - carga concentrada  
 $R$  - resultante de forças ou esforço resistente  
 $S$  - esforço solicitante  
 $V$  - força cortante

### Letras minúsculas

$a$  - aceleração  
 $b$  - largura  
 $g$  - aceleração da gravidade  
 $h$  - dimensão, altura  
 $l$  - comprimento  
 $m$  - metro ou massa  
 $máx$  - máximo  
 $mín$  - mínimo  
 $q$  - carga distribuída  
 $s$  - segundo  
 $v$  - deslocamento vertical  
 $y$  - distância da linha neutra ao ponto de maior encurtamento ou alongamento na seção transversal de uma peça fletida

### Letras gregas

$\alpha, \theta$  - ângulo ou coeficiente  
 $\delta$  - deslocamento  
 $\varnothing$  - diâmetro  
 $\epsilon$  - deformação específica  
 $\gamma_f$  - coeficiente de majoração das ações  
 $\sigma$  - tensão normal  
 $\bar{\sigma}$  - tensão normal admissível  
 $\tau$  - tensão tangencial  
 $\bar{\tau}$  - tensão tangencial admissível  
 $\nu$  - coeficiente de Poisson

### Índices

$adm$  - admissível  
 $c$  - compressão  
 $f$  - ação  
 $t$  - tração, transversal  
 $w$  - alma das vigas  
 $máx$  - máximo  
 $mín$  - mínimo

## 2. INTRODUÇÃO

Na mecânica dos corpos deformáveis, aqui tratada com detalhes pela “resistência dos materiais”, as estruturas nunca são absolutamente rígidas, deformando-se sob a ação das cargas a que estão submetidas. Estas deformações são geralmente pequenas e não alteram apreciavelmente as condições de equilíbrio ou de movimento da estrutura considerada.

No entanto, quando houver riscos de ruptura do material, essas deformações ganham mais importância, e a mecânica entra em cena, resumindo-se em três imprescindíveis fatores:

1. Determinação da resistência mecânica;
2. determinação da rigidez e;
3. determinação da estabilidade dos elementos estruturais.

A partir daí, os esforços internos sobre uma seção transversal plana de um elemento estrutural são definidos como um conjunto de forças e momentos estaticamente equivalentes à distribuição de tensões internas sobre a área dessa seção.

Os esforços sobre uma seção transversal plana qualquer (de uma viga, por exemplo) é igual à integral das tensões sobre essa área plana. Normalmente se distingue entre os esforços perpendiculares à seção transversal e os tangentes à essa mesma seção.

Esses esforços perpendiculares ao plano considerado são denominados normais, e é o que é dado pela resultante de tensões normais  $\sigma$ , ou seja, perpendiculares, a área para a qual pretendemos determinar o esforço. Por outro lado, os esforços tangentes ao plano considerado são denominados cisalhantes ou cortantes, e é o que é dado pela resultante de tensões cortantes  $\tau$ , ou seja, tangenciais à área para a qual pretendemos determinar o esforço.

Na figura 01 temos um ponto material qualquer, interno a um corpo rígido (sem deformações significativas), podendo ser um de elemento estrutural; e submetido à esforços externos que, conseqüentemente, acarretam em esforços internos. Estes esforços internos levam a um tensor de tensões, que representam o estado de tensão no espaço (tridimensional), e contemplam os dois tipos de tensão citados acima: as tensões normais e as tensões cisalhantes.

Analogamente, o mesmo ponto material, apresenta um tensor de deformações no espaço, já que qualquer corpo submetido à tensões de naturezas diferentes, normais ou cisalhantes; respondem a essas solicitações, com deformações também de naturezas

diferentes, porém similares aos esforços aplicados (deformações longitudinais e deformações angulares, respectivamente).

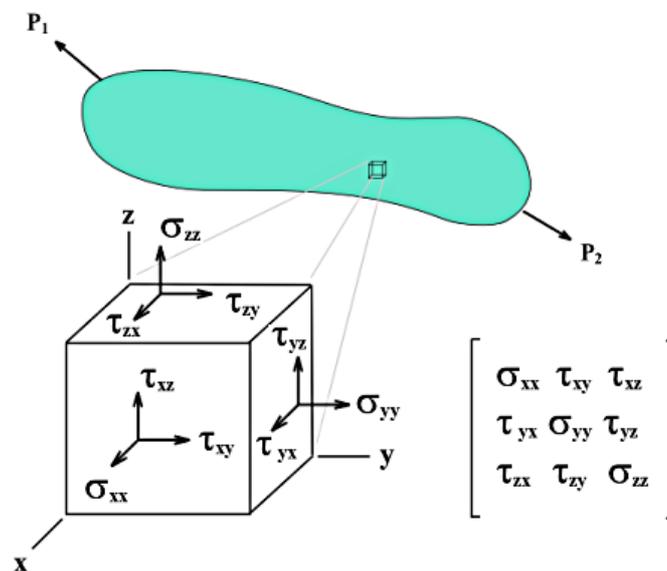


Figura 01 – Tensor de tensões

Resumindo; todo corpo solicitado por uma força ou pela resultante de um conjunto de forças quaisquer se deforma, gerando tensões internas. Estes esforços atuam isoladamente ou em conjunto no mesmo objeto.

### 3. TENSÕES NORMAIS - FUNDAMENTOS DA FLEXÃO

#### 3.1. Introdução

Classifica-se como tensão normal, as tensões solicitadas perpendicularmente a um plano qualquer, ocasionada pelos esforços internos. Elas podem ser de tração ou de compressão, independente da natureza das solicitações externas; que, por sua vez, podem ser originadas de:

- Força axial ou normal; e suas expressões foram tratadas em “Resistência dos Materiais I”, sendo análogas ao fenômeno elementar de pressão (força sobre área).

$$\sigma = \pm \frac{P}{A}$$

onde:

P é a força axial de tração ou de compressão, com sinal positivo para a primeira e negativo para a segunda; divergindo e convergindo do plano, respectivamente.

A é a área do elemento estrutural.

- Momentos fletores, levando exatamente à mesma natureza de tensões internas, que serão estudadas à seguir.

#### 3.2. Tipos de tensões normais

Dependendo da natureza dos esforços solicitantes, a que se submete o elemento ou peça estrutural, diferentes tipos de tensão normal podem ser classificadas e/ou denominadas. Assim, podemos dividir em:

- Tensão normal pura → é a tensão normal em que só atua as forças axiais de tração ou compressão ( $\pm P$ ), conforme representado na figura 02, e já tratados anteriormente.

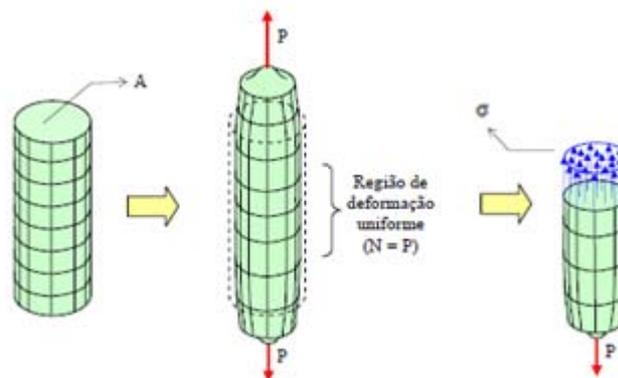


Figura 02 – Tensão normal pura

- Tensão normal simples → é a tensão normal em que só atua momento fletor ( $\pm M$ ) em uma única direção, levando internamente aos esforços de tração e/ou compressão. Também tratada como flexão simples ou pura; sendo o primeiro com a consideração do esforço cortante; que não contribui para o incremento da tensão normal, e o segundo desprezando-o. No caso da figura 03, as cargas distribuídas  $q$  provocam momentos fletores nas direções  $x$  ou  $y$ , respectivamente.

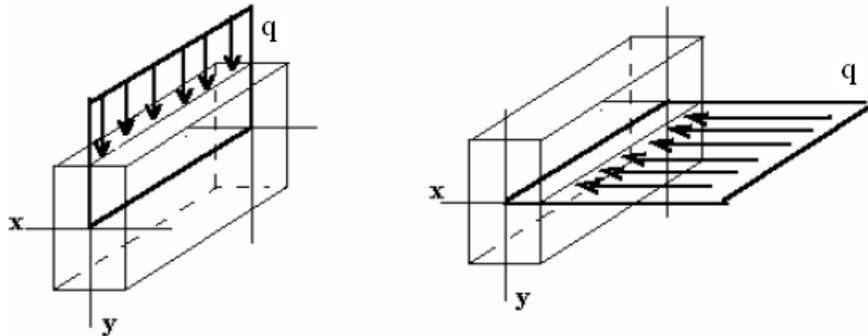


Figura 03 – Tensão normal simples

- Tensão oblíqua simples → é a tensão normal em que atuam momentos fletores simultaneamente nas duas direções ( $\pm M_1$  e  $\pm M_2$ ), ou um momento fletor resultante ( $\pm M_R$ ) inclinado em relação ao plano dos eixos principais centrais de inércia. A figura 4 mostra a carga distribuída  $q$ , provocando momentos fletores simultâneos em  $x$  e  $y$ .

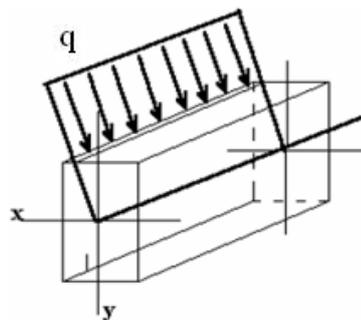


Figura 04 - Tensão normal oblíqua

- Tensão normal composta → é a tensão normal em que atuam momento fletor ( $\pm M$ ) em uma única direção, associado à uma força axial ( $\pm P$ ), podendo ter as magnitudes das tensões somadas ou subtraídas, dependendo da natureza das sollicitações (ver figura 05).

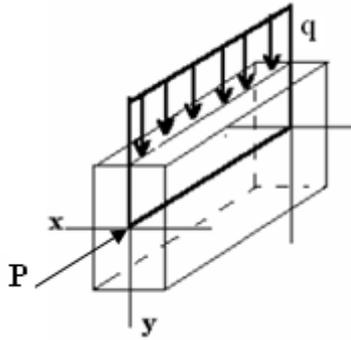


Figura 05 - Tensão normal composta

- Tensão oblíqua composta → é a tensão normal em que atuam momentos fletores nas duas direções ( $\pm M_1$  e  $\pm M_2$ ), ou um momento fletor resultante ( $\pm M_R$ ) inclinado, associado à uma força axial ( $\pm P$ ), também podendo ter as tensões somadas ou subtraídas, dependendo da natureza das solicitações (ver figura 06).

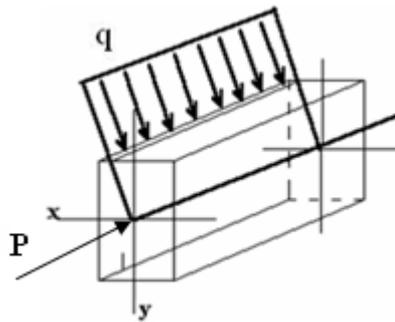


Figura 05 - Tensão oblíqua composta

Vale ressaltar que todos os tipos de tensões se resumem, ou se “concentram” na tensão oblíqua composta; já que ela apresenta uma formulação geral e de aplicação conjunta. Em outras palavras, basta igualar um ou outro termo a zero ( $N$ ,  $M_1$  ou  $M_2$ ), e aplicar os conceitos referentes a esta classificação de tensões, que chegamos às outras formulações.

### 3.3. Tensão normal simples – Flexão simples (com cisalhamento) ou pura (sem cisalhamento)

A flexão é um esforço corriqueiro e comum, e conforme evidenciado no dia a dia apresenta-se como uma das mais desfavoráveis solicitações. E é por esse motivo que não podemos evitá-lo em muitos casos. Elementos sujeitos à flexão podem ser vistos em edificações, estruturas convencionais, máquinas e em muitos outros lugares.

Na figura 06, uma barra de seção transversal retangular sofre esforços de flexão por forças atuantes em um plano que passa por um dos eixos principais centrais de inércia da seção.

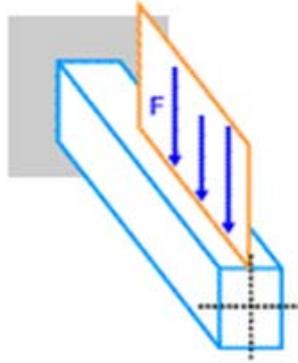


Figura 06 – Viga em balanço submetida à flexão normal simples

A flexão simples acontece (ou assim pode ser considerada) em muitos casos práticos e, evidentemente, é a de formulação mais fácil.

A figura 07a representa uma pequena parte da vista lateral de uma barra de seção transversal genérica conforme figura 07b, submetida à flexão provocada por um momento  $M$ .

A geometria da deformação sugere que uma parte (a superior neste caso) da seção transversal esteja sob esforços normais de compressão e outra parte (inferior), sob esforços normais de tração. A linha que divide essas duas partes é denominada **linha neutra (LN)** porque, naturalmente, as tensões ao longo da mesma são nulas.

Também pode ser constatado experimentalmente que as tensões em pontos de linhas paralelas à linha neutra são iguais e variam linearmente com a distância vertical  $y$ . Assim, no gráfico da figura 07c, as tensões variam de um máximo de compressão  $\sigma_1$  na extremidade superior da seção transversal, distância  $e_1$  da linha neutra, até um máximo de tração  $\sigma_2$  na extremidade inferior, distância  $e_2$  da linha neutra.

Com a linearidade mencionada, a tensão  $\sigma$  em um ponto situado a uma distância qualquer,  $y$ , da linha neutra pode ser dada por:

$$\sigma = \left( \frac{\sigma_1}{e_1} \right) y$$

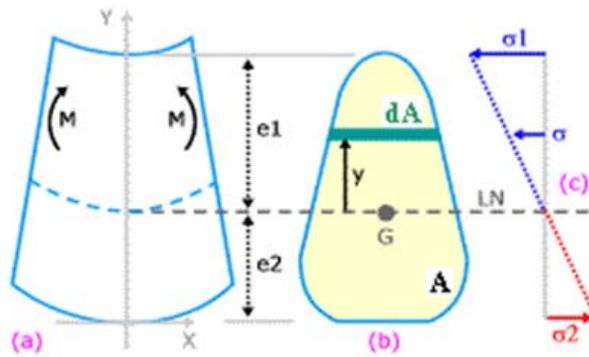


Figura 07 – Elemento estrutural submetido à flexão simples e distribuição interna das tensões normais

Para determinação da fórmula das tensões normais (simples), aplicou-se a primeira condição de equilíbrio estático ( $\sum F_x = 0$ ), conseguindo então a seguinte expressão:

$$\int F_x = \int \sigma dA = \int \left( \frac{\sigma_1}{e_1} \right) y dA = 0$$

$$\left( \frac{\sigma_1}{e_1} \right) \int y dA = 0$$

Sabemos da mecânica geral, que o termo  $\int y dA$  é referente ao momento estático  $Q$ , da superfície em relação à linha neutra LN. Se a flexão ocorre,  $\left( \frac{\sigma_1}{e_1} \right)$  não pode ser nulo e, assim, o momento estático,  $\int y dA$ , deve obrigatoriamente, ser zero. Conclui-se então que a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção transversal.

Por enquanto, não será considerada a segunda condição de equilíbrio estático ( $\sum F_y = 0$ ), uma vez que isso implica na existência de tensões de cisalhamento, que apesar de ocorrerem, serão vistas nos próximos capítulos, quando estudaremos as tensões tangenciais, cortantes ou cisalhantes.

Para a terceira condição de equilíbrio ( $\sum M_i = 0$ ), deve-se ter a soma dos momentos internos igual ao momento M aplicado externamente:

$$M = \int y \sigma dA = \int y \left( \frac{\sigma_1}{e_1} \right) y dA = \left( \frac{\sigma_1}{e_1} \right) \int y^2 dA$$

Mas o fator  $\int y^2 dA$ , que vem também da mecânica geral, é o momento de inércia I em relação à linha neutra. Portanto:

$$\sigma_1 \frac{I}{e_1} = M$$

Dessa igualdade pode-se isolar o valor de  $\sigma_1$  e combinar com a igualdade anterior. Analogamente, e através de procedimento similar, encontramos para  $\sigma_2$ , as seguintes equações básicas da flexão simples:

$$\sigma_1 = \frac{M}{I} e_1 \quad \& \quad \sigma_2 = \frac{M}{I} e_2$$

Ou seja, as tensões máximas de tração e compressão estão localizadas nas extremidades da seção transversal e são dadas em função do momento de flexão aplicado, das distâncias dessas extremidades em relação à linha neutra e do momento de inércia em relação à mesma linha.

Vale notar que, no caso da figura 07c,  $\sigma_1$  é uma tensão de compressão e  $\sigma_2$  é uma tensão de tração, podendo ser facilmente avaliada no encurtamento das fibras, na parte superior, e no alongamento das fibras, na parte inferior (figura 07a). Mas será o contrário se o momento externo for invertido. A figura 08 representa melhor estas deformações longitudinais e conseqüentemente o aparecimento de tensões normais de compressão e de tração em diferentes partes da mesma seção transversal.

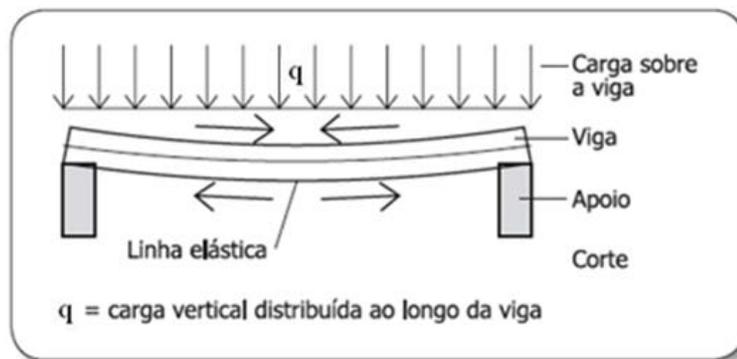


Figura 08 – Deformações longitudinais em uma viga bi-apoiada

Considerando a definição de momento ou módulo de resistência  $W$ , as igualdades anteriores podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma_1 = \frac{M}{W_1} \quad \& \quad \sigma_2 = \frac{M}{W_2}$$

onde  $W_1 = \frac{I}{e_1} \quad \& \quad W_2 = \frac{I}{e_2}$

O dimensionamento dos elementos estruturais, em níveis de resistência ao esforço normal, é feito pela comparação com as tensões admissíveis:

$$\sigma_1 \leq \bar{\sigma}_{adm1} \quad \& \quad \sigma_2 \leq \bar{\sigma}_{adm2}$$

Onde  $\bar{\sigma}_{adm1}$  e  $\bar{\sigma}_{adm2}$  são as tensões admissíveis para tração e compressão ou vice-versa conforme orientação do momento externo.

Se a seção transversal é simétrica em relação à linha neutra, LN,  $e_1 = e_2 = e$ . Por consequência,  $W_1 = W_2 = W$ . E as igualdades anteriores, ficam reduzidas seguinte expressão geral:

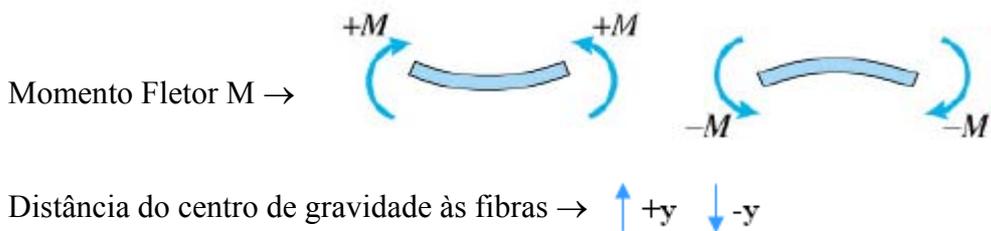
$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{M}{I} e \quad \text{ou} \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{M}{W}$$

Tomando-se  $y$  como o valor  $e$  para a fibra mais tracionada e/ou comprimida temos simplesmente:

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{M}{W}$$

Nesse caso, a tensão normal máxima de tração é igual à máxima de compressão, pois para seções simétricas, submetidas apenas a um momento fletor, o momento não difere dentro da seção transversal, e a distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada é a mesma do centro de gravidade à fibra mais comprimida. Ressalta-se ainda que, valores intermediários de tensão podem ser encontrados com a expressão acima, aplicando-se valores intermediários para  $y$ , já que a tensão é linear em relação ao centro de gravidade, conforme falado anteriormente.

Após a dedução da expressão de tensões normais na flexão simples, convencionou-se, em termos de sinais que:



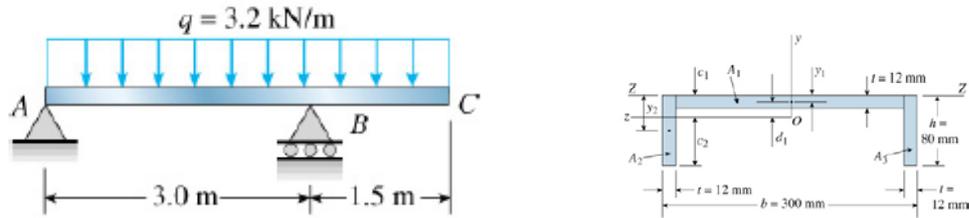
Assim:

$$\sigma = -\frac{M}{I} y$$

### Exemplo

A viga ABC abaixo tem apoios simples A e B e uma extremidade em balanço de B a C. O comprimento do vão é 3,0 m e o comprimento do balanço é de 1,5 m. Um carregamento distribuído uniformemente, de intensidade  $q = 3,2$  kN/m atua ao longo de todo o comprimento da viga. Essa viga tem uma seção transversal “U” invertido com largura  $b = 300$  mm e altura  $h = 80$  mm, como mostrado. A espessura da alma e dos

flanges é  $t = 12 \text{ mm}$ . Determine as tensões normais máximas de tração e compressão para a viga ABC.



Centro de gravidade:

$$y_{cg} = \frac{2 \times 80 \times 12 \times 40 + 276 \times 12 \times 74}{2 \times 80 \times 12 + 276 \times 12} = c_2 = 61,52 \text{ mm} ; c_1 = 80 - 61,52 = 18,48 \text{ mm}$$

Momento de inércia:

$$I_y = 2 \left[ \frac{12 \times 80^3}{12} + 12 \times 80 \times (61,52 - 40)^2 \right] + \left[ \frac{276 \times 12^3}{12} + 276 \times 12 \times (74 - 61,52)^2 \right] = 2468761,29 \text{ mm}^4$$

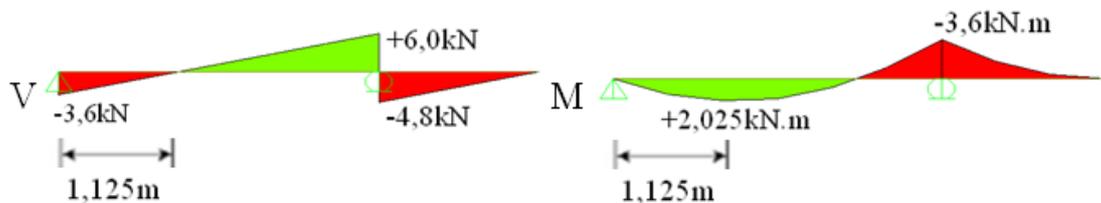
$$I_y = 246,88 \text{ cm}^4$$

Reações de Apoio:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 3,2 \times 4,5 \times \frac{4,5}{2} = 3V_B \rightarrow V_B = 10,8 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 \rightarrow 3,2 \times 4,5 - 10,8 = V_A \rightarrow V_A = 3,6 \text{ kN}$$

Diagramas de esforço cortante (V) e momento fletor (M):



Tensões máximas de tração e compressão:

$$\sigma_c = -\frac{+202,5}{246,88} (+1,848) = -1,52 \text{ kN/cm}^2 = -15,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t,max} = -\frac{+202,5}{246,88} (-6,152) = +5,05 \text{ kN/cm}^2 = 50,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = -\frac{-360}{246,88} (+1,848) = 2,69 \text{ kN/cm}^2 = 26,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,max} = -\frac{-360}{246,88} (-6,152) = -8,97 \text{ kN/cm}^2 = -89,7 \text{ MPa}$$

### 3.4. Tensão normal composta

Como visto no item anterior, os esforços de flexão são muito comuns nos elementos estruturais do dia-a-dia; e não menos usuais, estes esforços vem associados a sollicitações axiais de tração e compressão. Para exemplificar, podemos citar a infinidade de obras utilizando protensão (concreto protendido), que tem como finalidade básica a execução de estruturas mais esbeltas, com maiores vãos a serem vencidos; principalmente nas pontes e viadutos dos grandes centros urbanos. Destaca-se ainda, alguns elementos de fundação, que, ou utilizam um elemento próprio para resistir a estes esforços – as cintas de fundação – ou são diretamente dimensionados para receberem cargas das duas naturezas (axiais e de flexão) – as sapatas isoladas são o principal exemplo; embora recebam tanto momentos fletores em uma direção quanto em outra, caindo em um tipo de flexão que será tratada adiante, a tensão oblíqua composta.

A figura 09 apresenta um caso clássico de tensão normal composta e pode perfeitamente representar uma viga protendida, em que a força F horizontal é dada pelos cabos de aço da protensão.

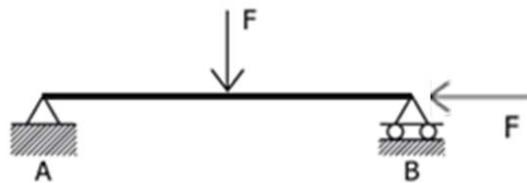


Figura 09 – Flexão normal composta

Por apresentar uma grande similaridade com os dois primeiros tipos de flexão (a pura e a simples), iremos apenas expressar sua formulação geral diretamente; não esquecendo de que a tensão normal composta nada mais é do que a superposição de efeitos da tensão normal pura com a tensão normal simples. Porém a superposição dessas sollicitações não caracteriza a soma, propriamente dita das intensidades, pois assim como estudado anteriormente os sinais devem ser respeitados.

- Positivo para tensão divergente ao plano ou tração;
- Negativo para tensão convergente ao plano ou compressão.

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M}{I} y$$

Parcela referente à tensão normal pura      Parcela referente à tensão normal simples

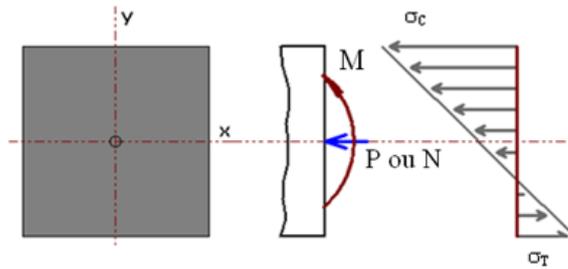


Figura 10 – Distribuição de tensões (Tensão normal composta)

Com relação à posição da linha neutra **LN**, podemos verificar na figura 10, que a sua ordenada ( $y$ ) não é mais coincidente com o centro de gravidade **CG**; e sua posição é diretamente proporcional à magnitude da força axial e à magnitude do momento fletor. Assim, a linha neutra pode cortar a seção transversal, como na figura 10, pode tangenciar a seção transversal ou localizar-se fora dela, como na figura 11. Na primeira hipótese a seção apresenta-se com os dois tipos de tensão na peça ( $\sigma_c$  e  $\sigma_t$ ), na segunda e na terceira hipóteses a seção transversal encontra-se, ou totalmente tracionada ( $\sigma_t$ ) ou totalmente comprimida ( $\sigma_c$ ), dependendo da natureza das sollicitações. A figura abaixo demonstra as hipóteses para peças comprimidas; porém a extrapolação para peças tracionadas torna-se válida no presente estudo.

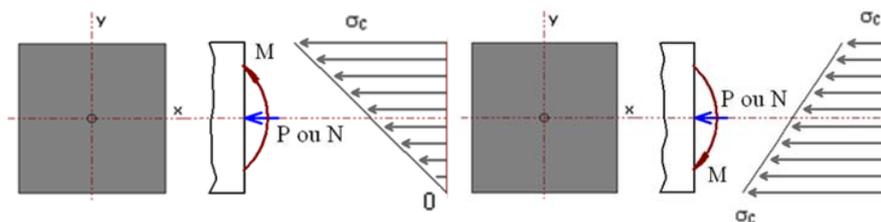


Figura 11 – Tensão normal composta – variação da Linha Neutra

Para se determinar a posição em relação a  $y$ , referente à linha de tensões equivalentes a zero, a **LN**, temos:

$$0 = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M}{I} y \Rightarrow y = \frac{\mp N \times I}{A \times (\pm M)}$$

Com relação à posição da abscissa  $x$ , para a linha neutra, temos sempre o valor igual a zero, apenas para esse tipo de sollicitação.

### 3.5. Tensão oblíqua simples

Dando continuidade ao estudo das tensões; um outro tipo de flexão torna-se necessária em termos de aplicação geral dos problemas encontrados no dia-a-dia: trata-

se da tensão oblíqua simples. De vasta aplicação na engenharia, destaca-se o simples fato de uma mesma viga de determinada edificação, receber esforços perpendiculares de carga permanente e sobrecarga, simultaneamente a esforços transversais de vento, levando a uma resultante de forças, inclinadas em relação aos eixos principais centrais de inércia.

Analogamente aos conceitos estudados na flexão normal composta e na flexão normal simples, podemos utilizar a superposição de efeitos para avaliar os valores dessa tensão.

Como temos a ocorrência de dois momentos fletores solicitantes (em duas direções ortogonais), ou mesmo a ocorrência de um momento fletor resultante, oblíquo/inclinado, que leva novamente a dois momentos fletores solicitantes ortogonais, através de projeções trigonométricas; podemos aplicar a mesma equação deduzida anteriormente. Porém torna-se necessário que sejam tomados alguns cuidados referenciais; como, momentos de inércia com relação aos eixos ortogonais, coordenadas do centro de gravidade da peça e distância relativa do centro de gravidade às fibras tracionadas e/ou comprimidas, nas duas direções.

Assim, temos:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

Parcela referente à tensão na direção y      Parcela referente à tensão na direção x

onde:

- $M_x$  é o momento fletor em direção a x;
- $M_y$  é o momento fletor em direção a y;
- $I_x$  é o momento de inércia em relação a x;
- $I_y$  é o momento de inércia em relação a y;
- y é a ordenada e x a abscissa.

obs: apenas em caráter didático, optou-se por escolher um sistema ortogonal xy, porém qualquer sistema de eixos ortogonais pode ser utilizado.

A figura 12, abaixo, representa um diagrama de tensões oblíquas simples, referente a um estado de tensão qualquer, destacando-se a posição inclinada, diretamente ligada aos esforços solicitantes originais.

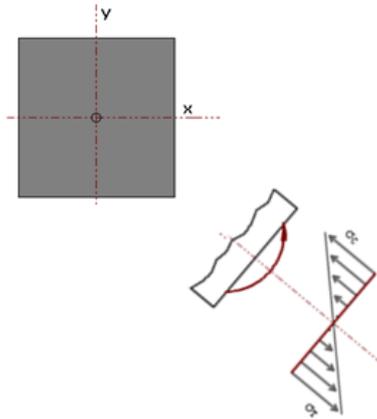


Figura 12 – Distribuição de tensões (Tensão oblíqua simples)

Para determinação da linha neutra **LN**, podemos utilizar também os conceitos empregados no item anterior, comparativamente:

$$0 = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

Como temos (ou conseguimos obter facilmente) os valores de momentos fletores nas duas direções e os momentos de inércia nas duas direções, as coordenadas referentes a quaisquer pontos da linha neutra, são obtidas por substituição de  $x$  e/ou  $y$  na equação acima (fazendo-se um sistema matemático com a equação acima). Assim, é de conhecimento geral, que após conhecidas as coordenadas de dois pontos, sempre é possível se traçar uma reta; no caso, a reta de tensões iguais a zero (**LN**). Destaca-se ainda que, na tensão oblíqua simples, a linha neutra sempre passa pelo centro de gravidade, assim como verificado na tensão normal simples. A diferença entre elas, é que a **LN** agora deve ser sempre inclinada.

Com relação aos sinais a serem adotados, deve-se seguir o critérios sugeridos no próximo item, onde estudaremos a flexão oblíqua composta.

### 3.6. Tensão oblíqua composta

Considerada como o agrupamento dos outros quatro tipos de tensão normal, a tensão oblíqua composta acaba por resumi-las em sua expressão geral. Assim, basta entender os conceitos referentes a este tipo de tensão para que possamos aplicá-la, (logicamente) nela e nas demais.

Com enorme aplicabilidade nas estruturas convencionais, a flexão oblíqua composta está presente em 99% dos pilares das edificações, bem como em suas fundações (rasas ou profundas), pois normalmente eles estão submetidos a esforços

axiais (inclusive peso próprio) e momentos fletores nas duas direções, oriundos das vigas adjacentes ou até mesmo das excentricidades acidentais que ocorrem em suas execuções, e que a norma brasileira preconiza sua aplicação.

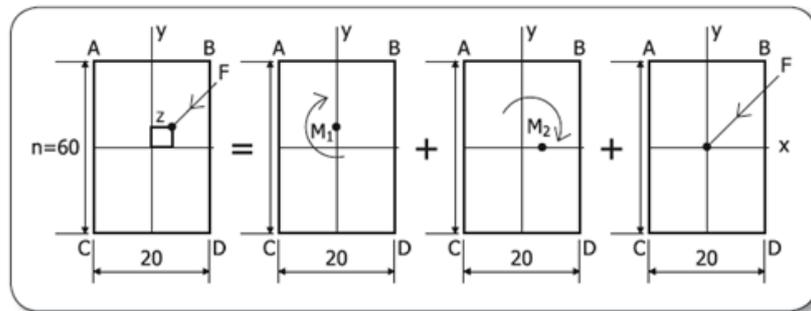


Figura 13 – Flexão oblíqua composta (excentricidade dos pilares)

Ainda utilizando de forma análoga os conceitos adquiridos nos itens anteriores, principalmente a superposição de efeitos, conseguimos facilmente chegar na seguinte expressão geral para determinação das tensões oblíquas compostas.

$$\sigma = \underbrace{\pm \frac{N}{A}}_{\text{Parcela referente à tensão normal pura}} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Parcela referente à tensão oblíqua simples}}$$

onde:

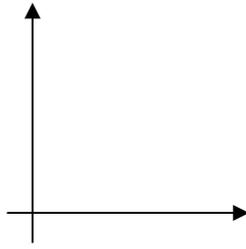
- N é o esforço axial de tração ou compressão;
- $M_x$  é o momento fletor em direção a x (em caráter didático);
- $M_y$  é o momento fletor em direção a y (em caráter didático);
- $I_x$  é o momento de inércia em relação a x (em caráter didático);
- $I_y$  é o momento de inércia em relação a y (em caráter didático);
- A é a área da seção transversal solicitada;
- y é a ordenada e x a abscissa (em caráter didático).

Outro fator bastante importante na utilização das expressões referentes à tensões normais de maneira geral, é a convenção de sinais. Para facilitar a aplicação, e posterior entendimento das análises, optou-se por adotar os seguintes sinais:

$$N \begin{cases} + \rightarrow \text{tração} \\ - \rightarrow \text{compressão} \end{cases}$$

$$M \begin{cases} + \rightarrow \text{traciona o hemisfério superior ou direito} \\ - \rightarrow \text{comprime o hemisfério superior ou direito} \end{cases}$$

Para o seguinte sistema de eixos coordenados:



Ainda temos a seguinte convenção vetorial:

$\otimes$  → Convergindo ou entrando no plano

$\odot$  → Divergindo ou saindo do plano

A figura 14 representa um diagrama de tensões oblíquas composta, destacando-se também a sua posição inclinada, assim como nos diagramas de tensão oblíqua simples.

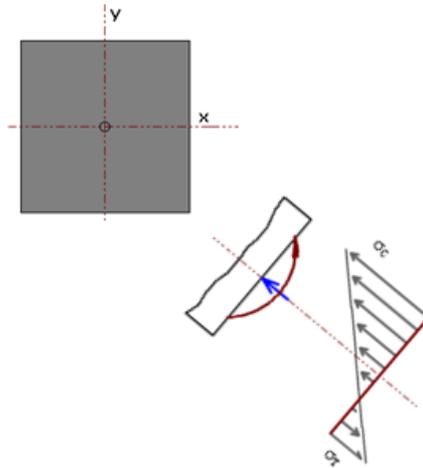


Figura 14 – Distribuição de tensões (Tensão oblíqua composta)

Para determinação da posição referente à linha neutra, **LN**, podemos aplicar:

$$0 = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

E assim como fizemos na flexão oblíqua simples, pode-se determinar dois pontos da reta (linha neutra), já que também são conhecidas as variáveis  $N$ ,  $A$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $I_x$  e  $I_y$ . À partir daí resolve-se um sistema matemático, com a posterior descoberta das abscissas e ordenadas dos eixos referenciais. Destaca-se ainda, que a linha neutra pode oscilar para dentro e para fora da seção transversal, assim como ocorrido na tensão normal composta (figura 15).

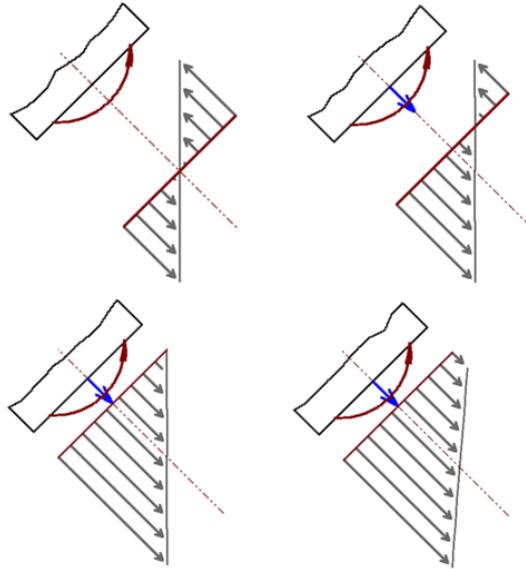


Figura 15 - Tensão oblíqua composta – variação da Linha Neutra (a primeira posição da LN refere-se à tensão oblíqua simples)

RESUMO

$$\text{Tensão Oblíqua Composta} \begin{cases} N \neq 0 \\ M_1 \neq 0 \\ M_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Tensão Oblíqua Simples} \begin{cases} N = 0 \\ M_1 \neq 0 \\ M_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Tensão Normal Composta} \begin{cases} N \neq 0 \\ M_1 \neq 0 \\ M_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Tensão Normal Simples} \begin{cases} N = 0 \\ M_1 \neq 0 \\ M_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Tensão Normal Pura} \begin{cases} N \neq 0 \\ M_1 = 0 \\ M_2 = 0 \end{cases}$$

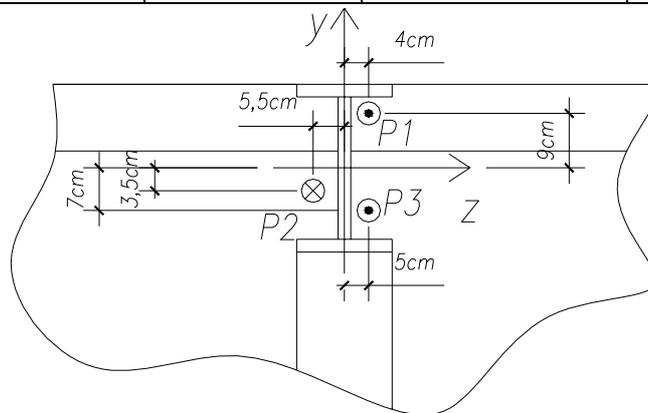
Fórmula geral: 
$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

Exemplo (questão de prova em maio de 2010)

Uma laje de concreto armado descarrega em um pilar metálico as seguintes cargas resultantes nodais: P1= 160kN; P2= 285kN e P3= 772kN (vide figura abaixo). Sabendo-se que o perfil utilizado é um W250x89 e suas dimensões são fornecidas na tabela abaixo, pede-se:

- Traçar o diagrama de tensões, mostrando as tensões normais extremas ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ )
- A tensão admissível do aço (tensão de escoamento) utilizado na fabricação do pilar é  $\sigma_{adm} = 150$  MPa. Dizer se a seção resiste ou não ao carregamento mostrado.

BITOLA	ALTURA (d)	LARGURA (bf)	ESPESSURA MESA (tf)	ESPESSURA ALMA (tw)
W250x89	26cm	25,6cm	1,73cm	1,07cm



Centro de gravidade:

- Conhecido → peça simétrica nas duas direções (y e z)

Momento de inércia:

$$I_z = \left[ \frac{25,6 \times 26^3}{12} \right] - \left[ \frac{(25,6 - 1,07) \times (26 - 2 \times 1,73)^3}{12} \right] = 14086,73 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2 \left[ \frac{1,73 \times 25,6^3}{12} + 1,73 \times 25,6 \times 0^2 \right] + \left[ \frac{(26 - 2 \times 1,73) \times 1,07^3}{12} + (26 - 2 \times 1,73) \times 1,07 \times 0^2 \right] = 4839,73 \text{ cm}^4$$

Área:

$$A = [25,6 \times 26] - [(25,6 - 1,07) \times (26 - 2 \times 1,73)] = 112,69 \text{ cm}^2$$

Solicitações:

$$N = +160 - 285 + 772 = +647 \text{ kN}$$

$$M_z = +160 \times 9 + 285 \times 3,5 - 772 \times 7 = -2966,5 \text{ kN} \times \text{cm}$$

$$M_y = +160 \times 4 + 285 \times 5,5 + 772 \times 5 = +6067,5 \text{ kN} \times \text{cm}$$

Linha Neutra

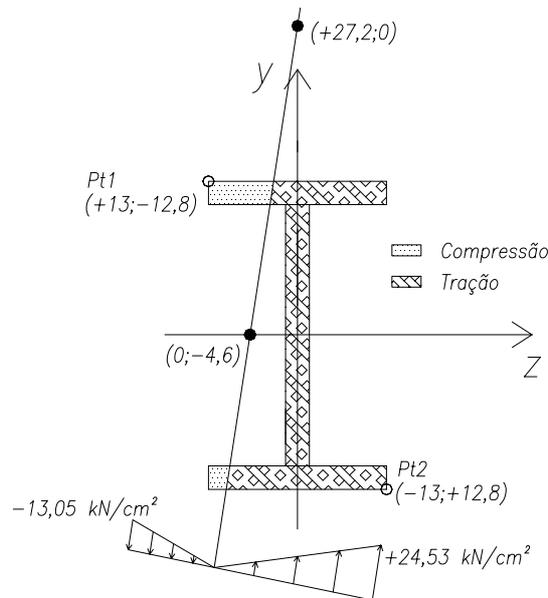
$$0 = \frac{+647}{112,69} + \frac{-2966,5}{14086,73} y + \frac{+6067,5}{4839,73} z \rightarrow 0 = 5,74 - 0,211y + 1,254z$$

$$-0,211y + 1,254z = -5,74$$

$$\text{Para } y=0 \rightarrow z = -4,592 \text{ cm}$$

$$\text{Para } z=0 \rightarrow y = +27,204 \text{ cm}$$

⇒ Note que o sinal negativo da fórmula,  $\sigma = -\frac{M}{I}y$ , não é mais aplicado devido à convenção de sinais adotado.



Tensões máximas de tração e compressão:

Pegando as coordenadas dos pontos mais afastados da linha neutra, temos:

$$\sigma_1 = 5,74 - 0,211 \times (+13) + 1,254 \times (-12,8) = -13,05 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 5,74 - 0,211 \times (-13) + 1,254 \times (+12,8) = +24,53 \text{ kN/cm}^2$$

Como a tensão de tração 245,3 MPa é superior a admissível 150 MPa, mesmo com a tensão de compressão 130,5 MPa sendo inferior, a seção não resiste aos carregamentos, devendo ser redimensionada.

### 3.7. Núcleo central de inércia

O núcleo central de inércia (ou região de pontos nucleares) é o lugar geométrico da seção transversal do elemento estrutural, tal que, se nele for aplicada uma carga axial P, toda a seção estará comprimida ou tracionada, dependendo do sentido desse esforço. Ou seja, a linha neutra LN, será tangente à seção transversal quando a força axial coincidir com o ponto nuclear. Esta propriedade é importante para materiais como o concreto, o aço, a alvenaria e principalmente os solos de fundação.

Na figura 16, se (1) é um ponto nuclear, ao aplicarmos uma força normal N

nesse ponto, teremos a LN (inferior) tangente à seção.

$$\begin{cases} N = -P \\ M_z = -P \times e_1 \end{cases}$$

$$0 = \frac{-P}{A} - \frac{P \times e_1}{I_z} y'' \Rightarrow -\frac{P \times e_1}{I_z} y'' = \frac{P}{A} \Rightarrow e_1 = \frac{-I_z}{A \times y''} \rightarrow \text{como } y'' \text{ é um número}$$

negativo por estar no sentido negativo de y, e<sub>1</sub> ficará positivo.

$$\begin{cases} N = -P \\ M_z = P \times e_2 \end{cases}$$

$$0 = \frac{-P}{A} + \frac{P \times e_2}{I_z} y' \Rightarrow \frac{P \times e_2}{I_z} y' = \frac{P}{A} \Rightarrow e_2 = \frac{I_z}{A \times y'} \rightarrow \text{como } y' \text{ é um número positivo}$$

por estar no sentido positivo de y, e<sub>2</sub> ficará positivo.

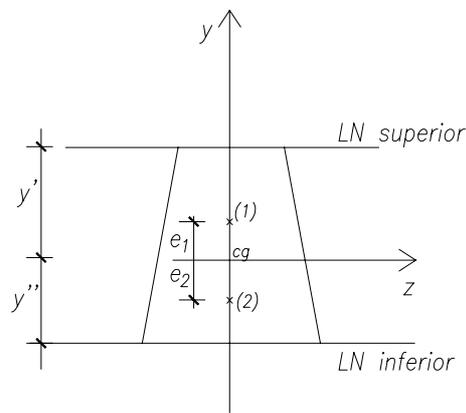


Figura 16 – Pontos nucleares

Para o Retângulo, temos:

$$e_1 = e_2 = \frac{I_z}{A \times y} = \frac{b \times h^3}{12 \times b \times h \times \frac{h}{2}} = \frac{h}{6} \text{ (em valor absoluto – sem sinal)}$$

Com isso qualquer força localizada sobre os pontos (1) e/ou (2) faz com que a LN fique tangente à seção (ou toda comprimida ou toda tracionada). Porém, se a força se posicionar entre (1) e (2), a LN estará fora da seção transversal, mas continuará toda comprimida ou toda tracionada. Agora, se a força se situar fora do intervalo (1) a (2), a LN cortará a seção, e teremos tensões de tração e de compressão na mesma peça.

Análogo à direção y teremos as mesmas considerações na direção z, assim:

$$e_3 = e_4 = \frac{I_y}{A \times z} = \frac{h \times b^3}{12 \times b \times h \times \frac{b}{2}} = \frac{b}{6}$$

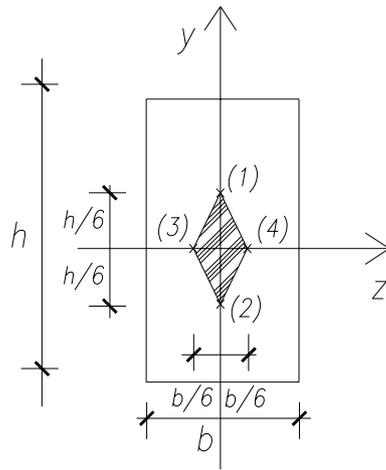


Figura 17 – Núcleo central de inércia – área do losango

Núcleos centrais de inércia para algumas seções

Quadrado	Círculo	Anel circular $D_n = D[1+(d/D)^2]/4$

Figura 18 – Núcleo central de inércia de algumas seções transversais

## 4. TENSÕES TANGENCIAIS – CISALHAMENTO TRANSVERSAL

### 4.1. Introdução

Assim como estudado no capítulo referente às tensões normais, as forças que “escorregam” pelo plano, denominadas solicitações tangenciais, cisalhantes ou cortantes, também produzem tensão; porém com características diferentes, e com denominação própria: Tensões tangenciais, cisalhantes ou cortantes.

Aqui também, estas tensões de cisalhamento são subdivididas, porém com maior simplicidade:

- Tensão tangencial pura → é a tensão em que só atuam forças de corte ( $\pm V$ ), conforme representados na figura 19, e já tratados anteriormente, sendo também análogas ao fenômeno elementar de pressão (força sobre área).

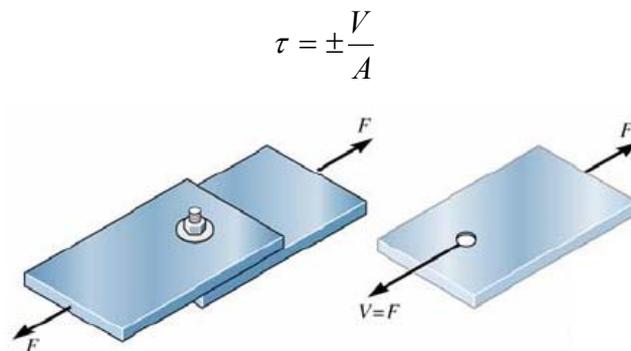


Figura 19 – Corte puro nas juntas sobrepostas

Onde  $\pm V$  é a força cortante, e embora o sinal represente um corte “horário ou anti-horário”, o significado físico independe do sinal, pois trata-se de uma solicitação única.

- Tensão tangencial na flexão → é a tensão de cisalhamento referente aos esforços associados à flexão (figura 20).

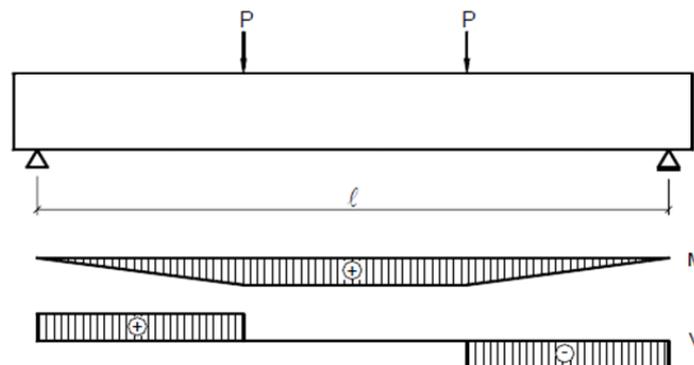


Figura 20 – Viga bi-apoiada com seções transversais, com e sem associação de flexão e cisalhamento

#### 4.2. Tensões Tangenciais na flexão

As tensões de cisalhamento associadas à flexão não se distribuem de maneira uniforme pela seção transversal do elemento estrutural. Isso não invalida os cálculos de valores a partir dos diagramas, mas eles devem ser considerados médios e, portanto, podem existir valores localizados significativamente acima da média.

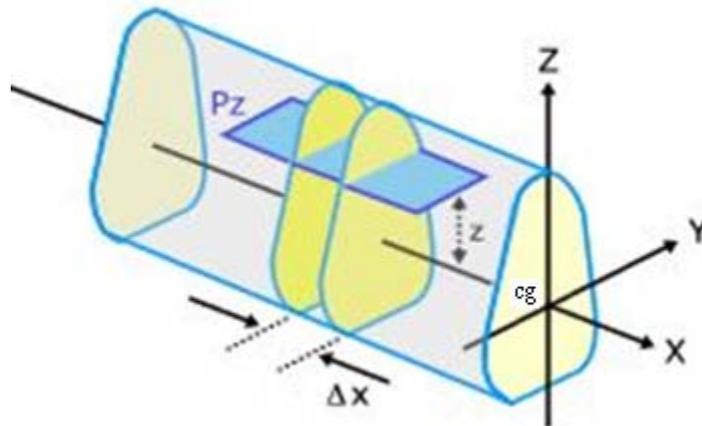


Figura 21 – Barra supostamente sob ação de flexão no plano xz

Supõe-se agora um pequeno trecho de largura  $\Delta x$  conforme indicado na figura 21. Este trecho, por sua vez, é cortado por um plano  $P_z$ , paralelo ao plano  $xy$  e situado a uma altura  $z$  do eixo  $x$ .

A figura 22a representa o corte do plano  $xz$  e, a figura 22b representa o corte de um plano paralelo a  $yz$ . O eixo  $y$  coincide com a linha neutra da seção transversal, ou seu centro de gravidade, já que temos flexão normal simples.

Conforme a figura 22a, o lado esquerdo do trecho é denominado 1) e o lado direito do trecho é denominado 2). Considerando somente a parte acima da linha neutra LN, as tensões normais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  variam linearmente de zero até um valor máximo na extremidade superior. Conforme visto no capítulo anterior, o valor máximo é dado por  $\frac{M}{I}e$ , onde  $I$  é o momento de inércia da seção  $A_{yz}$  em relação a  $y$ . Portanto, para um valor qualquer de  $z=u$ , temos:

$$\sigma_1(u) = \frac{M}{I}u$$

Para a face direita, o momento é  $M + \Delta M$  e, assim,

$$\sigma_2(u) = \frac{(M + \Delta M)}{I}u$$

Ainda na figura 22a,  $\sigma_x$  é a tensão de cisalhamento na superfície do plano  $P_z$  (figura 21) entre as duas seções separadas de  $\Delta x$ . Portanto, essa superfície tem dimensões  $\Delta x$  e

2y, como pode ser visto em (a) e (b) da figura 22.

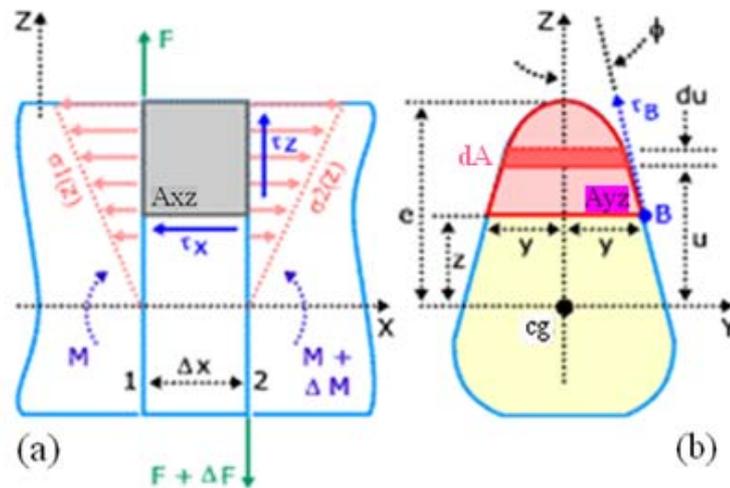


Figura 22 – Barra da figura 21 em corte longitudinal e transversal, respectivamente

Para manter o equilíbrio estático, as forças correspondentes a  $\tau_x$ ,  $\sigma_1(u)$  e  $\sigma_2(u)$  devem anular-se:

$$-\tau_x \Delta x 2y - \int \sigma_1 dA + \int \sigma_2 dA = 0 \quad \text{ou}$$

$$-\tau_x \Delta x 2y + \int (\sigma_2 - \sigma_1) dA = 0$$

Das equações de  $\sigma_1(u)$  e  $\sigma_2(u)$ , temos:

$$(\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{\Delta M}{I} u$$

Assim;

$$\tau_x \Delta x 2y = \frac{\Delta M}{I} \int u dA$$

Reagrupando a equação acima, temos:

$$\tau_x = \left( \frac{\Delta M}{\Delta x} \right) \left( \frac{1}{2yI} \right) \int u dA$$

Desde que se considera a superfície  $A_{yz}$  da figura 22b, essa integração vai de  $u = z$  até  $u = e$ .

A expressão  $\int_{u=z, u=e} u dA$  é o momento estático  $Q_y$  de  $A_{yz}$  em relação ao eixo y, conforme visto em mecânica geral.

Na situação limite,  $\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx}$ , que, conforme visto em teoria das estruturas, deve ser igual à força de cisalhamento V. Logo, o valor final da tensão é dado por:

$$\tau_x = \frac{VQ_y}{(2yI)}$$

Desde que tensões de cisalhamento aparecem sempre aos pares, como visto em resistência dos materiais I, deve-se ter:

$$\tau_z = \tau_x$$

Sabendo-se que a largura da seção  $2y$  pode simplesmente ser chamada de  $b$ , temos a seguinte expressão geral para a tensão de cisalhamento  $\tau$ .

$$\tau = \frac{VQ}{bI}$$

onde

- $V$  é igual à força cortante;
- $Q$  é igual ao momento estático em relação a um plano de referência

qualquer;

- $b$  é a base da seção transversal;
- $I$  é o momento de inércia.

Vale ressaltar que através da expressão geral descrita acima, principalmente no que tange a contribuição do momento estático, confirmamos o fato das tensões cortantes, na flexão, não se distribuírem uniformemente dentro da seção transversal da peça (ver figura 23).

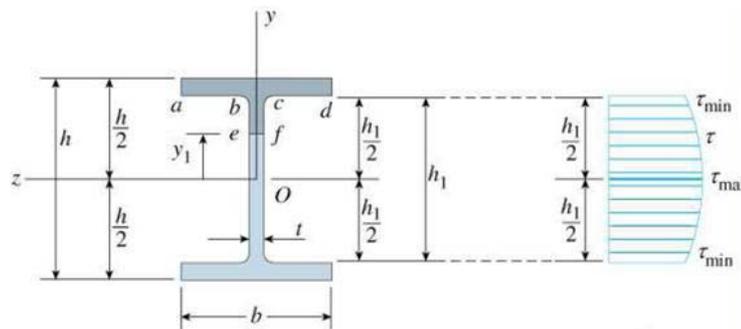


Figura 23 – Variação da tensão cisalhante na seção transversal

### 4.3. Fluxo de cisalhamento

O projeto de elementos de fixação; como pregos, parafusos, soldas ou cola (elementos que evitam o deslizamento relativo – ver figura 24); requer o conhecimento das forças cisalhantes ao longo do comprimento da peça. Esse carregamento, expresso como força por unidade de comprimento é denominado fluxo de cisalhamento,  $q$ .

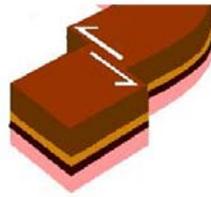


Figura 24 – Deslizamento relativo

$$q = \tau_{xy} \times b = \text{kgf} / \text{cm}^2 \times \text{cm} = \text{kgf} / \text{cm} \text{ (unidade de carga por unidade de comprimento)}$$

$$q = \frac{VQ}{bI} \times b \Rightarrow q = \frac{VQ}{I} \text{ ou } \begin{array}{l} \text{igual a V} \\ \text{igual a Q} \end{array}$$

$$dF = \frac{dM}{I} \int u dA \text{ e } q = \frac{dF}{dx} \Rightarrow q = \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} \int u dA$$

Logo;  $q = \frac{VQ}{I}$ , onde q é o fluxo de cisalhamento.

Na figura abaixo, podemos verificar que a carga cortante que percorre o caminho no interior da seção transversal, representada pelas setas na figura 25b, é denominada como o fluxo de cisalhamento q.

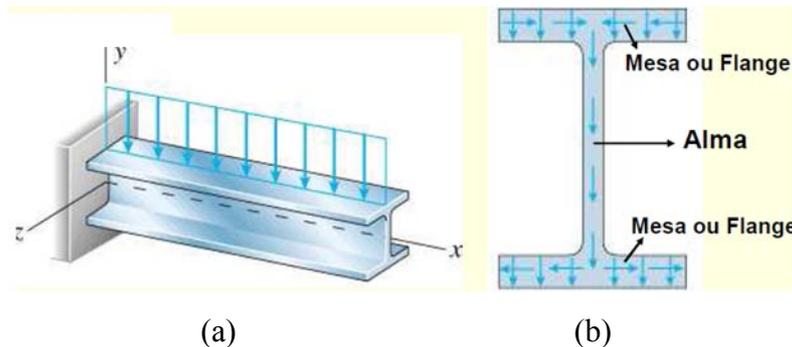


Figura 25 – Fluxo de cisalhamento em uma viga em balanço de seção transversal I

#### 4.4. Centro de cisalhamento ou centro de torção

O centro de cisalhamento (também chamado centro de cortante ou centro de torção), é um ponto situado no plano da seção transversal de uma peça prismática (de seção transversal invariável e uniforme), como uma viga ou um pilar; tal que, qualquer esforço cortante que passe por ele não produzirá momento torsor na seção transversal da peça.

Quando existe um eixo de simetria, o centro de cisalhamento está situado sobre ele. Em peças com dois eixos de simetria o centro de cisalhamento coincide com o centro de gravidade da seção e nesse caso a flexão e a torção estão desassociadas, e uma viga ou pilar pode ter flexão sem torção e torção sem flexão. Entretanto, em seções

assimétricas, é necessário determinar o centro de cisalhamento para determinar corretamente as tensões.

### Distribuição da tensão de cisalhamento em flanges de vigas

Como já visto anteriormente, as tensões de cisalhamento variam de maneira parabólica nas seções transversais retangulares e circulares. Em uma seção I, se fizermos um corte vertical A-A, como mostrado na figura 26, existem tensões de cisalhamento neste plano devido à flexão da viga.

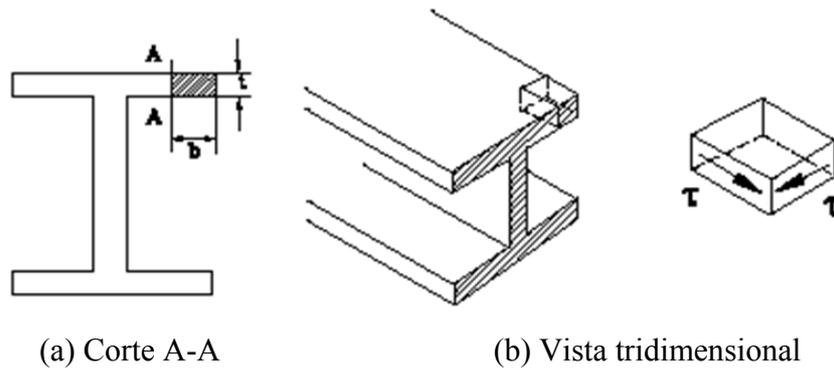


Figura 26 – Vista de seção I com corte vertical A-A

As tensões de cisalhamento têm a direção mostrada na figura acima, ou seja, na direção longitudinal da viga.

Vale lembrar que a tensão normal de flexão  $\sigma$  na direção longitudinal  $x$ , quando integrada ao longo da área da seção transversal fornece uma força axial  $F = \int_A \sigma dA$  e

$$\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y.$$

Suponha ainda que o momento fletor aumente ao longo da direção longitudinal da viga. A seção à direita do elemento diferencial, ilustrado na figura 26, possui um maior momento fletor, e conseqüentemente uma força longitudinal resultante maior. Para compensar a diferença entre as forças axiais, a tensão de cisalhamento gera uma força de cisalhamento resultante no mesmo sentido da força menor, conforme mostra a figura 27.

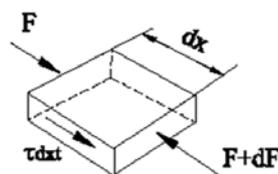


Figura 27 – Sentido da tensão de cisalhamento

Se o corte A-A, da figura 26, está na aresta da seção, a tensão de cisalhamento é

zero. Se a espessura do flange é constante e o corte A-A aproxima-se da alma, a área aumenta linearmente de zero até um valor máximo.

Como a distância do centro do flange ao centro de gravidade,  $y$ , é constante, o momento estático também aumenta linearmente  $\rightarrow Q_z = b \times t \times y$ . Da mesma forma, como  $I_z$  e  $V_y$  são constantes na seção, o fluxo de cisalhamento  $q(x) = \frac{V_y(x) \times Q_z(x)}{I_z(x)}$

também aumenta e atinge o valor máximo sobre a alma.

Conseqüentemente, a tensão de cisalhamento  $\tau = q/t$  também varia linearmente no flange caso a espessura permaneça constante. O valor máximo também ocorre sobre a alma. A mesma variação de  $q$  e  $\tau$  aplica-se a ambos os lados do eixo de simetria vertical. No entanto, essas grandezas possuem direções opostas nos dois lados da seção, separados pelo eixo de simetria.

Integrando-se a tensão de cisalhamento sobre a área onde ela age, tem-se uma força resultante. A magnitude da máxima força horizontal  $F$ , desenvolvida na metade do flange é:

$$F = \frac{1}{2} \tau_{\text{máx}} A = \frac{\tau_{\text{máx}}}{2} \times \frac{bt}{2} \text{ ou ainda, } F = \frac{q_{\text{máx}} \times b}{4}$$

As tensões de cisalhamento e as forças estão representadas na figura 28. Como as forças  $F$  ocorrem aos pares nos flanges, e devido à simetria da seção I, elas se anulam e não apresentam efeito externo aparente.



(a) Distribuição da tensão no flange (b) Forças resultantes no flange

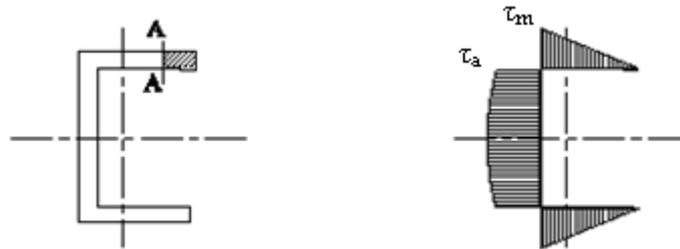
Figura 28 – Tensões e forças cisalhantes em uma viga I

### Centro de Cisalhamento, propriamente dito

Em perfis que não tem simetria vertical, a fórmula para o cálculo da tensão normal  $\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y$ , não pode ser aplicada. No entanto, assume-se aqui a validade da

expressão anterior.

Em um perfil U com flanges finos, por exemplo, a tensão de cisalhamento varia linearmente em seus flanges (abas ou mesas) e parabolicamente em sua alma como mostra a figura 29. Para uma seção assimétrica, um carregamento que provoca flexão, poderá provocar também uma torção da seção, como mostra a figura abaixo; para um perfil U ou C.



(a) Perfil U com corte A-A (b) Tensão em um perfil U

Figura 29 – Tensão de cisalhamento em um perfil U

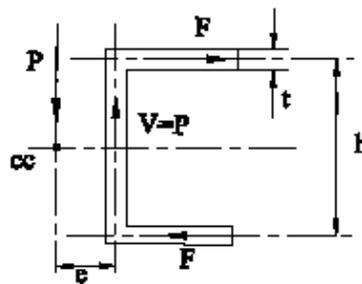


Figura 30 – Forças em um perfil U

A integral das tensões de cisalhamento na alma fornece a força V.

$$V = \int_{h/2}^{h/2} \tau t dy$$

Como já visto anteriormente, a força horizontal resultante em um flange é dada por:

$$F = \frac{1}{2} \tau A = \left( \frac{\tau}{2} \right) bt$$

Como pode se observar na figura 30, as forças F nos flanges formam um binário F . h, o qual provoca uma torção na seção. Para evitar essa torção e ao mesmo tempo tornar válida a aplicação da expressão da tensão normal de flexão pura, deve-se aplicar as forças externas de tal forma a balancear o binário interno F . h.

Considerando que o carregamento seja aplicado em um ponto distante e da alma e fazendo-se o somatório de momentos em relação a um ponto da alma, tem-se:

$$P \times e = F \times h \rightarrow e = \frac{Fh}{P}$$

O ponto que dista  $e$  da alma é chamado CENTRO DE CISALHAMENTO, pois se o carregamento for aplicado em uma direção paralela à alma e distante  $e$  da mesma, este carregamento não provocará torção. Tendo em vista que:

$$F = \left(\frac{\tau}{2}\right)bt \text{ e } \tau(x) = \frac{V_y(x) \times Q_z(x)}{t \times I_z(x)}$$

Vem que para  $V=P$ :

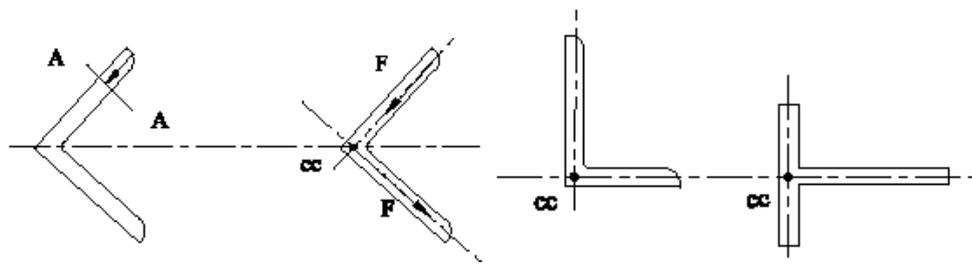
$$e = \frac{Fh}{P} = \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)bth}{P} = \frac{bthVQ}{2PtI_z} \Rightarrow e = \frac{bthP\left(bt\frac{h}{2}\right)}{2PtI_z} \Rightarrow e = \frac{b^2th^2}{4I_z}$$

O centro de cisalhamento  $e$  é independente da magnitude de  $P$ , assim como da sua localização ao longo da vida (é uma propriedade física da seção transversal).

Para seções com um eixo de simetria, o centro de cisalhamento está sempre localizado sobre ele. Já para seções com dois eixos de simetria, o centro de cisalhamento coincide com o centróide da seção transversal (por exemplo, perfil I).

A posição exata do centro de cisalhamento para seções com flanges largos pode ser de difícil determinação.

Para alguns perfis bastante utilizados na engenharia, os centros de torção são indicados na figura 31, sem a realização de qualquer cálculo, pois é o único ponto em que convergem as resultantes das forças, não podendo haver braço de alavanca para consideração do momento de torção.



(a) Perfil L com abas iguais

(b) Perfis L e T

Figura 31 – Centro de cisalhamento para alguns perfis

Indicação do fluxo de cisalhamento em algumas seções transversais

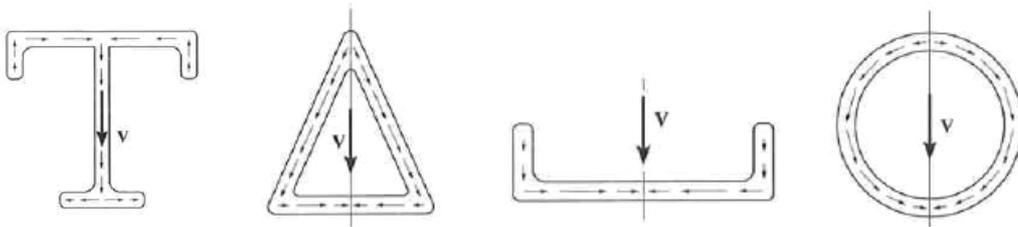
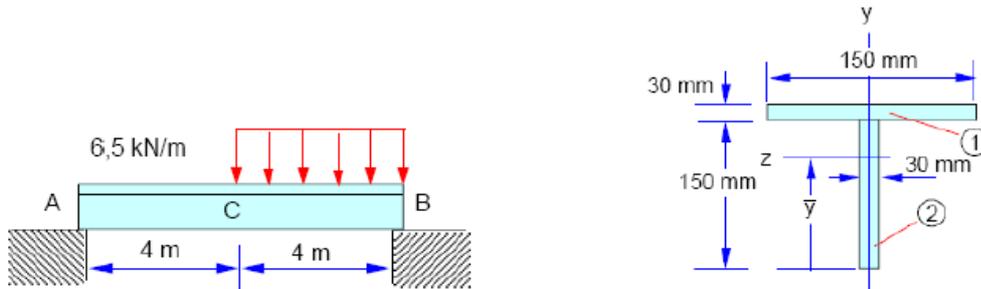


Figura 32 – Fluxo de cisalhamento em algumas seções transversais

Exercícios Resolvidos

1) A viga abaixo é composta de duas pranchas de madeira formando um perfil do tipo T. determine a máxima tensão cisalhante na cola necessária para mantê-las juntas.

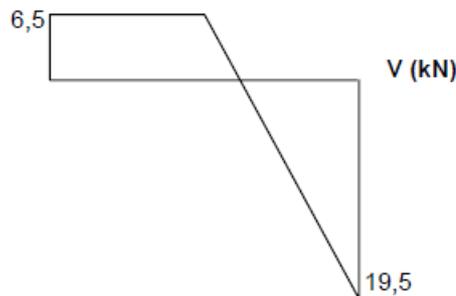


Reações de Apoio:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 6,5 \times 4 \times 6 = 8V_B \rightarrow V_B = 19,5 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 \rightarrow 6,5 \times 4 - 19,5 = V_A \rightarrow V_A = 6,5 \text{ kN}$$

Diagramas de esforço cortante (V)



Centro de gravidade:

$$y_{cg} = \frac{150 \times 30 \times 165 + 30 \times 150 \times 75}{150 \times 30 + 30 \times 150} = 120 \text{ mm}$$

Momento de inércia

$$I_z = \left[ \frac{30 \times 150^3}{12} + 30 \times 150 \times (120 - 75)^2 \right] + \left[ \frac{150 \times 30^3}{12} + 150 \times 30 \times (165 - 120)^2 \right] = 2,7 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

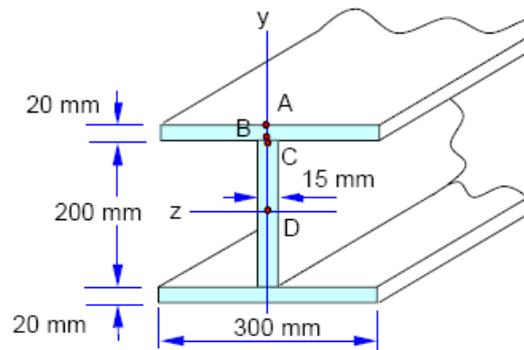
Momento estático

$$Q = Ad \rightarrow Q = 30 \times 150 \times (120 - 75) = 2,025 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

Cálculo da tensão máxima  $\tau_{\text{máx}}$

$$\tau = \frac{V \times Q}{b \times I} = \frac{19,5 \times 2,025 \times 10^5}{30 \times 2,7 \times 10^7} = 4,875 \times 10^{-3} \text{ kN/mm}^2 = 0,4875 \text{ kN/cm}^2 = 4,875 \text{ MPa}$$

2) Plote a distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal de uma viga do tipo I com força cortante  $V = 80 \text{ kN}$



Momento de inércia

$$I_z = \frac{300 \times 240^3}{12} - \frac{285 \times 200^3}{12} = 1,556 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

Cálculo da tensões:

Ponto A

$$Q_A = 0 \Rightarrow \tau_A = 0$$

Ponto B

$$Q_B = 300 \times 20 \times 110 = 6,6 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$\tau_B = \frac{80 \times 6,6 \times 10^5}{1,556 \times 10^8 \times 300} = 1,13 \times 10^{-3} \text{ kN/mm}^2 = 1,13 \text{ MPa}$$

Ponto C

$$Q_B = Q_C = 300 \times 20 \times 110 = 6,6 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

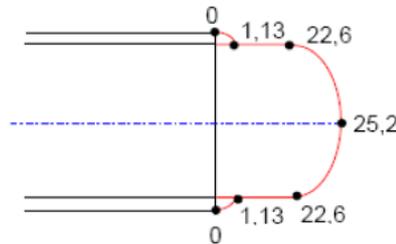
$$\tau_C = \frac{80 \times 6,6 \times 10^5}{1,556 \times 10^8 \times 15} = 2,26 \times 10^{-2} \text{ kN/mm}^2 = 22,62 \text{ MPa}$$

Ponto D

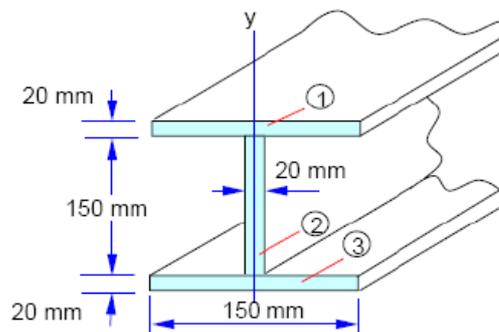
$$Q_D = 300 \times 20 \times 110 + 15 \times 100 \times \frac{100}{2} = 7,35 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$\tau_D = \frac{80 \times 7,35 \times 10^5}{1,556 \times 10^8 \times 15} = 2,52 \times 10^{-2} \text{ kN/mm}^2 = 25,20 \text{ MPa}$$

Distribuição das tensões



3) Determine a quantidade de pregos necessária para manter os elementos da viga abaixo (mesa e alma), de 3 metros de comprimento, unidos quando submetida a um cortante de 2 kN. A tensão admissível dos pregos de diâmetro  $d = 2 \text{ mm}$  é  $\tau_{adm} = 225 \text{ MPa}$ .



Momento de inércia

$$I_z = \frac{150 \times 190^3}{12} - \frac{130 \times 150^3}{12} = 4,9175 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

Momento estático

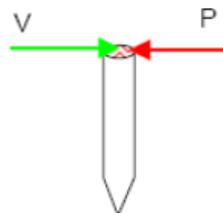
$$Q = Ad \rightarrow Q = 20 \times 150 \times (75 + 10) = 2,55 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

Cálculo do fluxo de cisalhamento

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{2 \times 2,55 \times 10^5}{4,9175 \times 10^7} = 1,037 \times 10^{-2} \text{ kN/mm} = 10,37 \text{ N/mm}$$

Cálculo da força suportada por cada prego

$$\tau_{adm, prego} = \frac{V}{A} \Rightarrow 225 = \frac{V}{\frac{\pi d^2}{4}} \Rightarrow V = P = 706,86 \text{ N}$$



Cálculo do espaçamento entre os pregos

$$q = 10,37 \text{ N/mm} \rightarrow 10,37 \text{ N por 1 mm}$$

$$10,37 \text{ N} \text{ ————— } 1 \text{ mm}$$

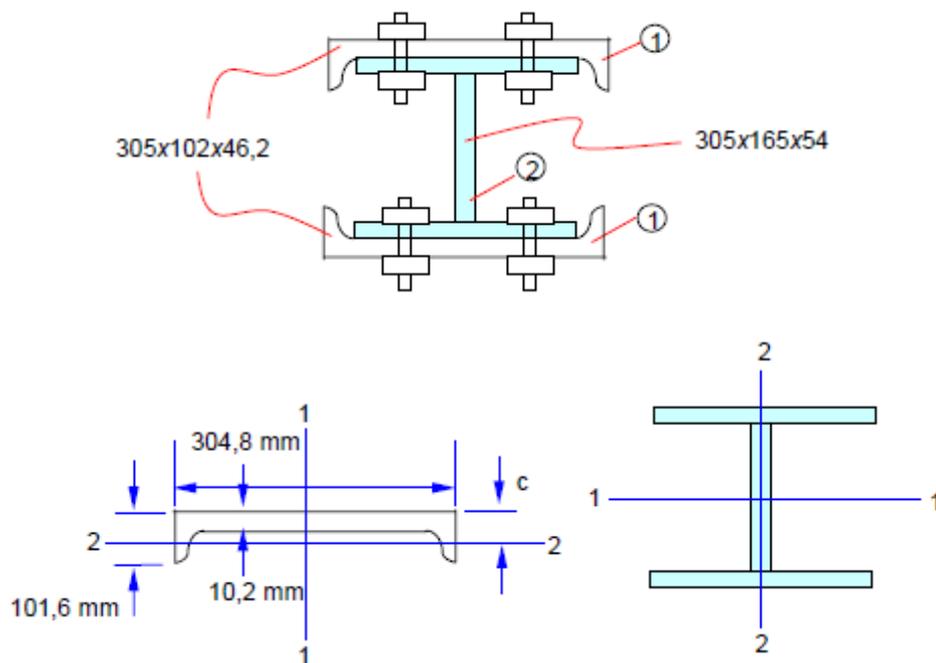
$$706,86 \text{ N} \text{ ————— } e$$

$$e = \frac{706,86}{10,37} = 68,16 \text{ mm}$$

Calculo do número de pregos

$$n_{\text{pregos}} = \frac{3000 \text{ mm}}{68,16 \text{ mm}} = 44,01 = 44 \text{ pregos}$$

4) A viga abaixo é formada pela união de diferentes perfis parafusados entre si. Determine a máxima força cortante que a viga pode suportar se os parafusos resistem a uma força cortante de 11 kN e estão espaçados de 200 mm.



Perfil 305x102x46,2kg

Perfil 305x165x54kg

$$A = 58,8 \text{ cm}^2$$

$$A = 68,8 \text{ cm}^2$$

$$I_{11} = 8214 \text{ cm}^4$$

$$I_{11} = 11686 \text{ cm}^4$$

$$I_{22} = 500 \text{ cm}^4$$

$$I_{22} = 988 \text{ cm}^4$$

$$c = 2,66 \text{ cm}$$

Designation	Mass per m	Depth of Section	Width of Section	Thickness of		Root Radius	Depth between Fillets	Area of Section
				Web	Flange			
	M	h	b	s	t	r	d	A
	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>
305x165x54	54	310.4	166.9	7.9	13.7	8.9	265.2	68.8

Momento de inércia

$$I_z = 2I_1 + I_2 = 2 \left[ 500 + 58,8 \times \left( \frac{31,04}{2} + 1,02 - 2,66 \right)^2 \right] + 11686 = 35342,2 \text{ cm}^4 = 35342,2 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Momento estático

$$Q = Ad \rightarrow Q = \left( \frac{31,04}{2} + 1,02 - 2,66 \right) \times 58,8 = 816,144 \text{ cm}^3 = 816,144 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Cálculo do fluxo de cisalhamento

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V \times 816,144 \times 10^3}{35342,2 \times 10^4} = 2,309 \times 10^{-3} V \text{ unidade de força / mm}$$

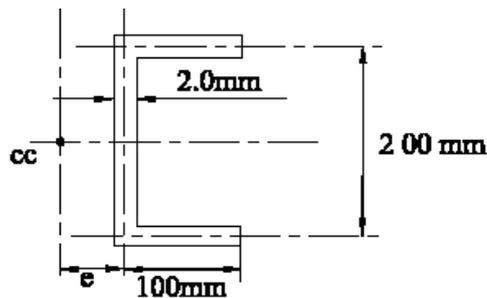
Cálculo do espaçamento entre os parafusos

$$2,309 \times 10^{-3} V \text{ ————— } 1 \text{ mm}$$

$$2 \times 11 \text{ kN ————— } e_{\text{parafusos}} = 200 \text{ mm}$$

$$e_{\text{parafusos}} = \frac{\text{força cortante nos parafusos}}{q} \Rightarrow 200 = \frac{2 \times 11}{2,309 \times 10^{-3} V} \Rightarrow V = 47,64 \text{ kN}$$

5) Determinar a posição do centro de cisalhamento para um perfil U mostrado abaixo.

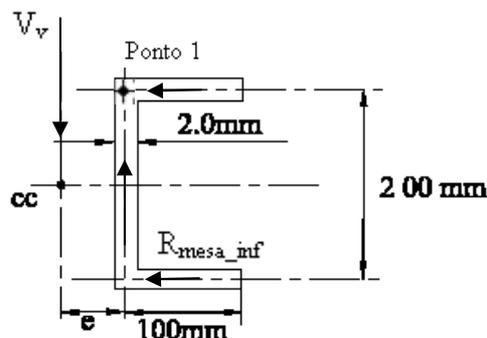


Momento de inércia

$$I_z = 2 \left[ \frac{101 \times 2^3}{12} + 101 \times 2 \times 100^2 \right] + \left[ \frac{2 \times 198^3}{12} + 2 \times 200 \times 0^2 \right] = 5333867 \text{ mm}^4$$

$$e = \frac{100^2 \times 2 \times 200^2}{4 \times 5333867} = 37,50 \text{ mm}$$

Outro modo de determinação do centro de torção, sem o emprego da fórmula



→ O ponto 1 foi escolhido como referência, pois ao “passar” por ele, as forças

resultantes da mesa superior e da alma, não geram momento.

$$R_{\text{mesa\_inf}} = \frac{1}{2}bq = \frac{1}{2}b \times \frac{V_v \times (t \times b \times \frac{h}{2})}{I_z} = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{V_v (2 \times 100 \times 100)}{5333867} = 0,187V_v$$

$$V_v \times e = 0,187V_v \times 200 \Rightarrow e = \frac{0,187 \times 200V_v}{V_v} \Rightarrow e = 37,50mm$$

## 5. TRANSFORMAÇÕES DAS TENSÕES – ESTADO PLANO (EPT)

### 5.1. Introdução

Transformar as componentes de tensões normais e cisalhantes, associados a um sistema de coordenadas qualquer; em componentes de tensões normais e cisalhantes, associados a um sistema de coordenadas com outra orientação é o principal objetivo do nosso estudo. Com isso, conseguimos, a partir de equações de transformação, obter para um elemento estrutural, o plano e a intensidade das tensões normais máximas e o plano e a intensidade das tensões de cisalhamento máximas.

O estado de tensão da figura 33a não é encontrado com muita frequência na prática da engenharia, por isso aproximações ou simplificações das solicitações sobre um determinado corpo, a fim de que as tensões produzidas em um sistema estrutural sejam analisadas, são extrapolados para um dos planos referenciais (figura 33c).

Algumas observações gerais são importantes na orientação desse estudo. Podemos destacar assim:

1- Em torno de um ponto, um elemento de superfície pode assumir uma infinidade de posições. Ocorrerá então o aparecimento de diferentes tensões no mesmo ponto, correspondentes a cada uma dessas posições.

2- O estado de tensão em um ponto é o conjunto de todas as tensões ocorrendo em todos os planos passando por esse ponto.

3- Sobre o cubo de tensões; demonstra-se que o estado de tensão em um ponto, fica definido quando forem conhecidas as tensões nele, referentes aos três planos ortogonais entre si, que se interceptam no ponto considerado.

4- Para analisarmos o estado de tensão em um ponto, imaginamos um cubo situado com vértice no ponto, em cujas facetas supõe-se as tensões conhecidas.

5- Orientamos o cubo considerado, como um sólido de dimensões infinitesimais, tomando como origem o ponto em estudo e como eixos de referência as arestas a ele concorrentes.

6- Nas três faces do cubo que são “visíveis”, ocorrem tensões iguais e de sentidos opostos.

7- O estado de tensões em um ponto, no caso mais geral, ficará então definido conhecendo-se nove tensões, que são as que atuam nas faces do cubo elementar.

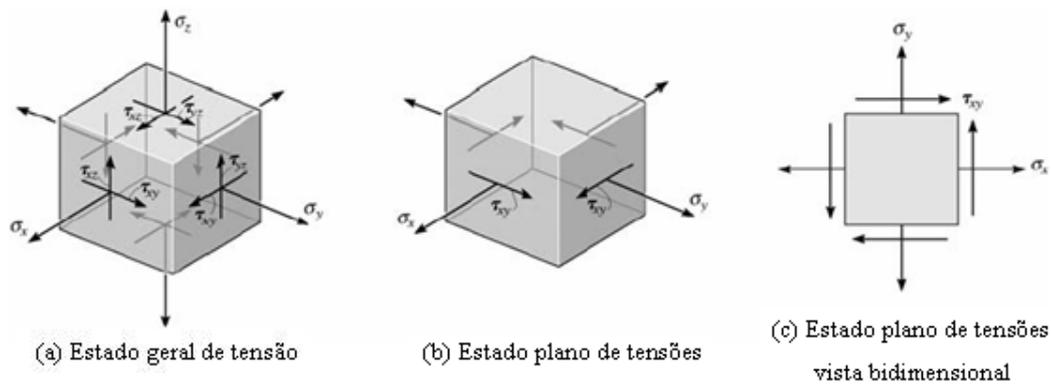


Figura 33 – Estado de tensão em um ponto

## 5.2. Estados de tensão em um ponto

### Tipos

- Estado triplo ou tri-Axial – As tensões que atuam nas faces do cubo elementar admitem componentes nas direções de todas as suas arestas.
- Estado plano, duplo, ou bi-Axial – As tensões no cubo apresentam componentes paralelas a apenas dois eixos.
- Estado simples ou uniaxial – Nas faces do cubo atuam tensões na direção de uma única aresta.
- Estado de cisalhamento puro - Nas faces do cubo atuam apenas tensões tangenciais. O simples valor  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  é suficiente para definir o estado de tensão no ponto.

### Análise das tensões no estado plano

O problema da análise das tensões consiste em determinar as componentes da tensão em um plano qualquer, a partir das componentes da tensão que atuam em três planos ortogonais, passando pelo ponto, e supostamente conhecidas.

Duas componentes de tensão normal e uma componente de tensão de cisalhamento atuam sobre as quatro faces do elemento. Por convenção, adotou-se o plano x-y da figura 33c.

Supondo que o estado de tensão seja definido pelas componentes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , orientadas ao longo dos eixos x, y, como na figura 34a, mostraremos como obter as componentes  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$  e  $\tau_{x'y'}$ , orientados ao longo dos eixos  $x'$ ,  $y'$  (figura 34b), de modo que representem o mesmo estado de tensão no ponto.

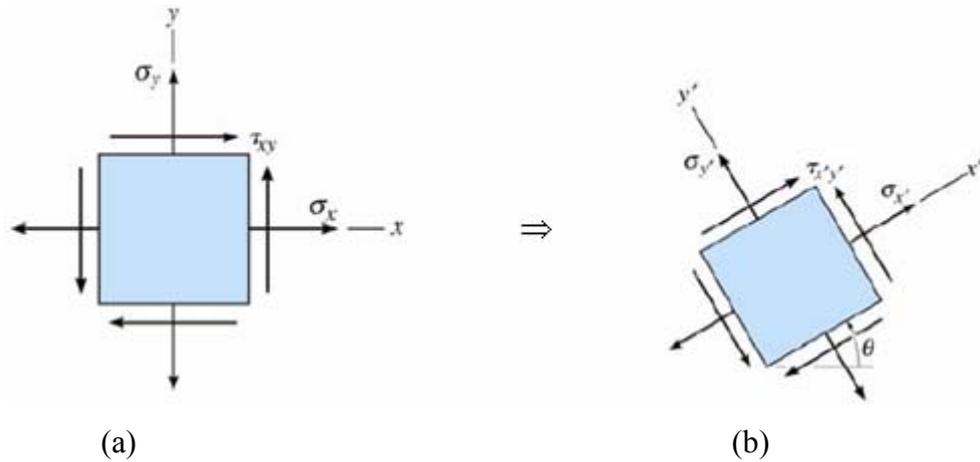


Figura 34 – Estado plano de tensão

### 5.3. Transformação de tensões propriamente dita

Os procedimentos para se determinar as componentes  $\sigma_{x'}$ ,  $\tau_{x'y'}$  que atuam sobre a face  $x'$  do elemento são:

1- Seccionar o elemento da figura 34a (figura 35a) → Área seccionada ( $\Delta A$ ).

2- Desenhar o diagrama de corpo livre do segmento, mostrando as forças que atuam sobre o elemento, ou seja, multiplicam-se os componentes de tensão de cada face pela área sobre a qual atuam.

3- Aplicar as equações de equilíbrio de força nas direções  $x'$  e  $y'$  para obter as componentes de tensão desconhecidos  $\sigma_{x'}$ ,  $\tau_{x'y'}$ .

4- Se  $\sigma_{y'}$ , que atua sobre a face  $+y'$  do elemento da figura 34b, tiver de ser determinado, considere um elemento como na figura 35b e depois é seguir o mesmo procedimento descrito acima. Note que a tensão de cisalhamento não precisará ser determinada se ela já tiver sido calculada, pois ela atende a propriedade complementar de cisalhamento ( $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$ ).

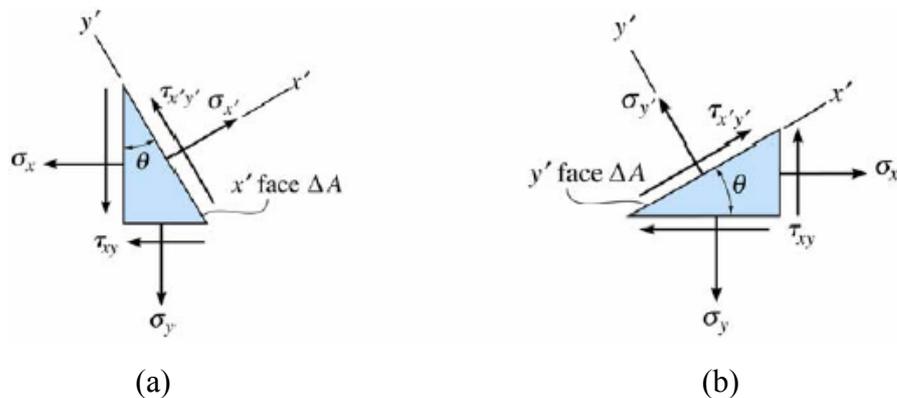
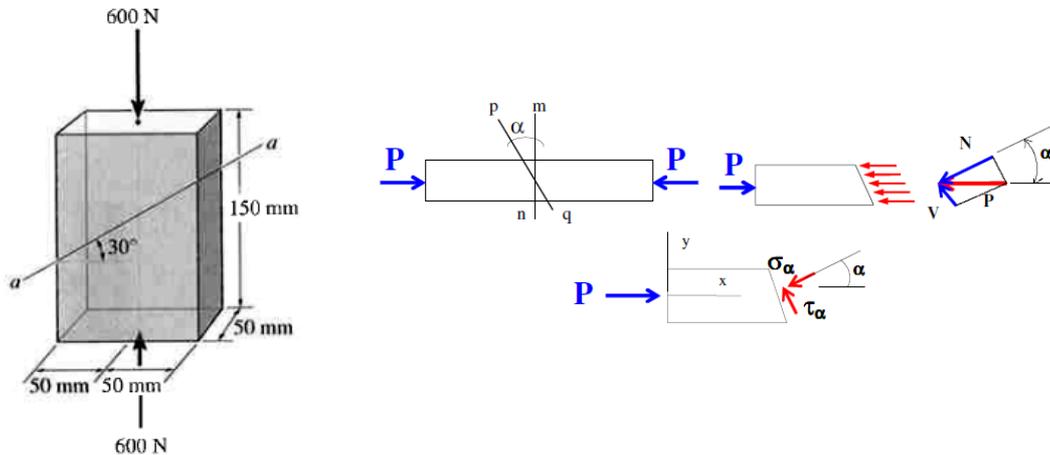


Figura 35 – Transformação de tensões (em outro plano)

### Exercício

Uma força axial de 600N atua na barra de aço mostrada. Determine as componentes das tensões sobre o plano definido pela seção a-a, inclinada a 30° em relação à horizontal.



$$\sigma_x = \frac{600}{100 \times 50} = 0,12 \text{ MPa}$$

Como a área da seção inclinada é  $A' = \frac{A}{\cos 30^\circ} = \frac{100 \times 50}{0,866} = 5773,5 \text{ mm}^2$  ( $A' > A$ ) e a força

axial atuante nessa área é  $P' = P \cos 30^\circ = 600 \times 0,866 = 519,62 \text{ N}$  ( $P' < P$ )

$$\sigma_\alpha = \frac{519,62}{5773,5} = 0,09 \text{ MPa}$$

A força que “escorrega” pela superfície inclinada é  $P'' = P \sin 30^\circ = 600 \times 0,5 = 300 \text{ N}$

$$\tau_\alpha = \frac{300}{5773,5} = 0,052 \text{ MPa}$$

A tensão  $\sigma_x = 0,12 \text{ MPa}$  original no plano reto, “transformou-se” nas tensões  $\sigma_{x'} = 0,09 \text{ MPa}$  e  $\tau_{x'y'} = 0,052 \text{ MPa}$ , no plano inclinado.

### 5.4. Equações gerais de transformação de tensão para o estado plano

#### Convenção de sinais

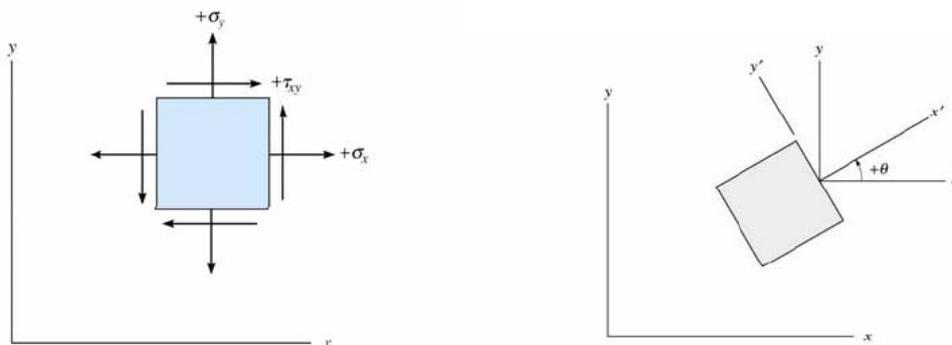


Figura 36 – Convenção de sinais positivos

A componente das tensões normais ou de cisalhamento será positiva caso atue na direção positiva da coordenada, da face positiva do elemento, ou caso atue na direção negativa da coordenada da face negativa do elemento como na figura 36.

Assim, a tensão normal é positiva quando atua para fora das faces e a tensão de cisalhamento é positiva quando atua para cima na face direita do elemento.

Com relação ao ângulo  $\theta$ , a orientação do plano inclinado é simplesmente positiva no sentido anti-horário.

### Equações

No exercício acima, foi possível determinar, a partir das relações trigonométricas, bem como do conceito trivial de pressão (força sobre área), o estado de tensões em outro plano, diferentemente do plano original de aplicação da carga. Porém, para facilitar o cálculo, algumas expressões foram definidas:

$$\sigma_{x'} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{sen} 2\theta$$

e

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} \cos 2\theta + \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2} \text{sen} 2\theta$$

Para se determinar  $\sigma_{y'}$ , basta substituir  $\theta$  por  $(\theta + 90^\circ)$ , já que os planos  $x'$  e  $y'$  sempre são defasados em  $90^\circ$  (figura 37), e assim temos:

$$\sigma_{y'} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2(\theta + 90^\circ) + \tau_{xy} \text{sen} 2(\theta + 90^\circ)$$

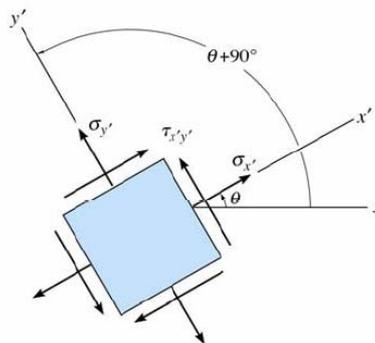


Figura 37 – Defasagem dos planos  $x'$  e  $y'$

### Exercício

Faça o exemplo anterior, aplicando as equações de transformação de tensões. Descubra também a tensão normal no plano perpendicular a ele ( $30^\circ + 90^\circ$ ).

$$\sigma_x = \frac{-600}{100 \times 50} = -0,12 \text{MPa} \rightarrow \text{entrando no plano ou de compressão}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{(-0,12 + 0)}{2} + \frac{(-0,12 - 0)}{2} \cos 60^\circ + 0 \sin 60^\circ =$$

$$\sigma_{x'} = -0,06 - 0,06 \times 0,5 = -0,09 \text{MPa} \rightarrow \text{entrando no plano ou de compressão}$$

$$\tau_{x'y'} = 0 \cos 60^\circ + \frac{(0 + 0,12)}{2} \sin 60^\circ = +0,052 \text{MPa} \rightarrow \text{anti-horária}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{(-0,12 + 0)}{2} + \frac{(-0,12 - 0)}{2} \cos 240^\circ + 0 \sin 240^\circ =$$

$$\sigma_{y'} = -0,06 - 0,06 \times -0,5 = -0,03 \text{MPa} \rightarrow \text{entrando no plano ou de compressão}$$

### 5.5. Tensões Principais e Tensão Cisalhante máxima no plano

A prática da engenharia nos diz que é importante se determinar a orientação dos planos que fazem as tensões normais e cisalhantes chegarem ao máximo e ao mínimo, bem como a magnitude das mesmas, pois os dimensionamentos, de um modo geral, se baseiam nestas informações.

#### Tensão Principal no plano

Para determinarmos as tensões normais máxima e mínima devemos derivar a equação da transformação de tensões, vista acima, em relação a  $\theta$  e igualar a zero; assim:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{0,5(\sigma_x - \sigma_y)}}$$

∴ Esta equação define a orientação dos planos em que atuam as tensões normais máxima e mínima.

A solução dessa raiz leva a  $2\theta_1$  e  $2\theta_2$  defasados de  $180^\circ$ ; logo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  ficam defasados de  $90^\circ$ .

Através de relações trigonométricas e substituição nas fórmulas anteriores, temos:

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

onde  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  e são denominadas de tensões principais nos planos.

→ Ao substituir as relações trigonométricas na formulação de  $\tau$  vemos que a tensão cisalhante atuante nos planos principais é nula.

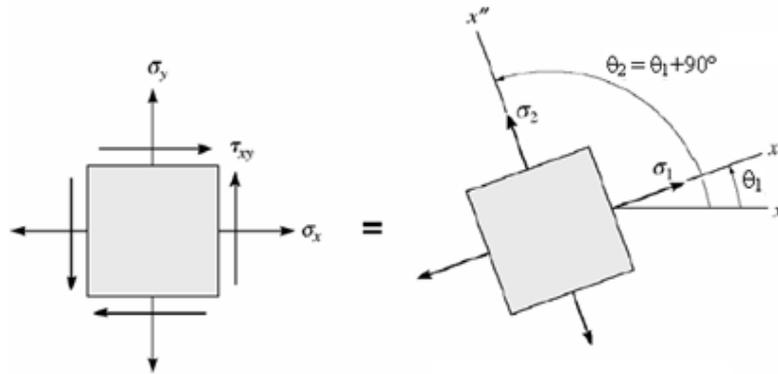


Figura 38 – Plano das tensões principais

### Tensão Cisalhante Máxima no plano

Assim como fizemos para encontrar as tensões principais, para determinarmos a tensão de cisalhamento máxima devemos derivar a equação da transformação de tensões, vista anteriormente, em relação a  $\theta$  e igualar a zero; assim:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \tau = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = \frac{-0,5(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}}$$

∴ Esta equação define a orientação dos planos em que atuam as tensões cisalhantes máximas (negativa e positiva).

∴ Para diferenciarmos, apenas em termos de nomenclatura, a orientação dos planos principais com a orientação dos planos cisalhantes máximos, utilizaremos a variável  $\theta'$  para representar os segundos. Assim;

$$\operatorname{tg} 2\theta' = \frac{-0,5(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}}$$

A solução dessa raiz leva a  $2\theta'_1$  e  $2\theta'_2$ , que representam uma defasagem de  $90^\circ$  em relação ao ângulo determinado nas tensões principais ( $2\theta$ ). Assim, os planos em que atuam as tensões cisalhantes máximas são defasados de  $45^\circ$  em relação aos planos que definem  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Logo;

$$\tau_{\text{máx.no.plano}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

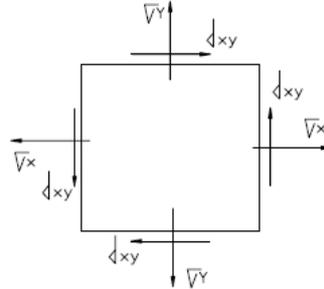
Existe também uma tensão normal nos planos de tensão cisalhante máxima, que é denominada tensão normal média e é determinada por:

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

### Exercício

Determinar as tensões principais, as tensões cisalhantes máximas e os respectivos planos de atuação, para o estado de tensões abaixo:

$$\sigma_x = +1MPa; \sigma_y = +1MPa \text{ e } \tau_{xy} = +1MPa$$



Tensões Principais

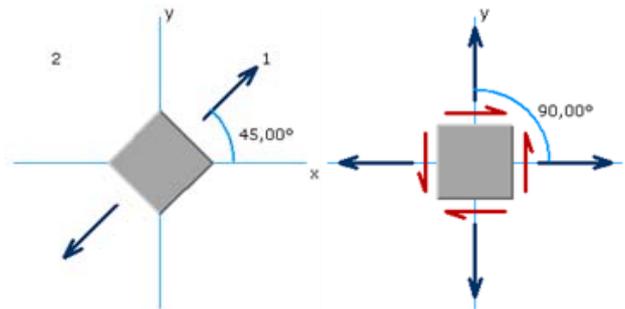
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{0,5(1-1)} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta_1 = 45^\circ \text{ e } \theta_2 = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

$$\sigma_1 = \frac{1+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)^2 + 1^2} = 2MPa \text{ e } \sigma_2 = \frac{1+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)^2 + 1^2} = 0MPa$$

Tensões Cisalhantes Máximas e Tensão Normal Média

$$\operatorname{tg} 2\theta' = \frac{-0,5(1-1)}{1} = 0 \Rightarrow 2\theta' = 0^\circ \Rightarrow \theta'_1 = 0^\circ \text{ e } \theta'_2 = 0^\circ + 90^\circ = 90^\circ$$

$$\tau_{máx.no.plano} = \pm \sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)^2 + 1^2} = \pm 1MPa \text{ e } \sigma_{méd} = \frac{1+1}{2} = 1MPa$$



### 5.6. Círculo de Tensões de Mohr

As equações anteriores podem ser combinadas entre si, encontrando-se a equação de um círculo, chamado de círculo de Mohr para as tensões. Assim, podemos obter graficamente uma solução mais rápida para os problemas de transformação de tensões, à partir da análise dessas tensões em um dado ponto material.

A equação cartesiana de um círculo é dada por  $(x - a)^2 + (y - c)^2 = R^2$ . Por outro lado, a equação do círculo de Mohr é dada por  $(\sigma_{x'} - \sigma_{méd})^2 + (\tau_{x'y'})^2 = R^2$ .

Se estabelecermos eixos coordenados, em que  $\sigma$  seja positivo para a direita e  $\tau$

positivo para cima, e representarmos a equação do círculo de Mohr, teremos um círculo de raio R com centro em  $(\sigma_{\text{méd}}, 0)$  no eixo  $\sigma$ . O raio R é dado  $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$  (ver figura 39).

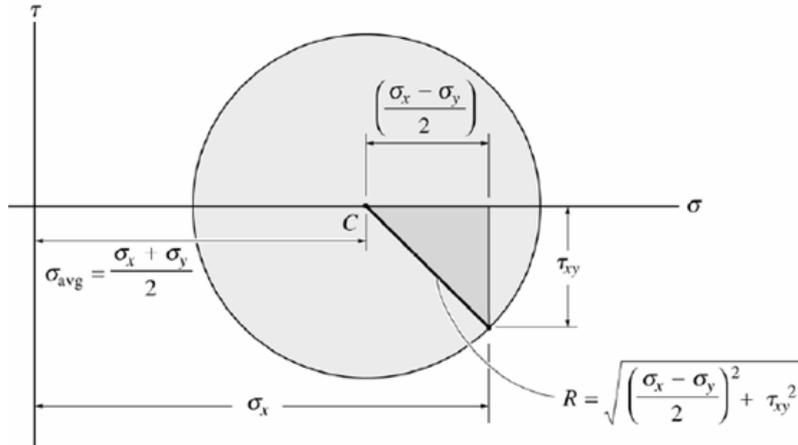


Figura 39 – Círculo de Mohr

Passo a passo para confecção do círculo de Mohr

- 1 - Retire um elemento do ponto que se deseja estudar, no qual as tensões normais e de cisalhamento são conhecidas, indicando o sentido correto dessas tensões;
- 2 - Num sistema de eixos coordenados marque os pontos  $X(\sigma_x; -\tau_{xy})$  e  $Y(\sigma_y; \tau_{xy})$  e interligue-os com uma reta, encontrando o centro C  $(\sigma_{\text{méd}}; \tau_{\text{máx}})$ . Com centro em C e raio CX, trace o círculo, encontrando os pontos A, B, D e E.
- 3 - Os pontos A de coordenadas  $(\sigma_{\text{máx}}; 0)$  e B  $(\sigma_{\text{mín}}; 0)$  representam as tensões principais. O ângulo CAX é o ângulo  $2\theta$ .

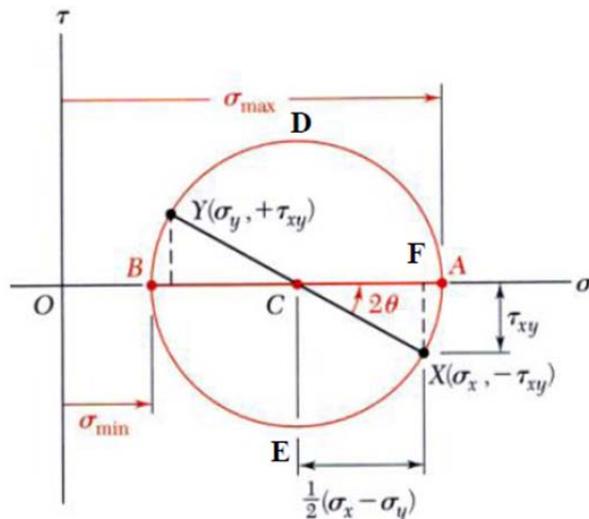


Figura 40 – Confecção do círculo de Mohr – (1)

4 - Depois de desenhado o círculo, os demais valores são encontrados geometricamente ou calculados.

$$OC = \sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ e } CE = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

5 - As tensões principais são encontradas em A e B.

$$\sigma_{máx} = OA = OC + CE = \sigma_{méd} + R \text{ e } \sigma_{mín} = OB = OC - CE = \sigma_{méd} - R$$

$$\tau_{máx} = CD = R$$

6 - Os planos principais são dados por:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{XF}{CF} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

A direção de rotação de Ox para Oa é a mesma que de CX para CA

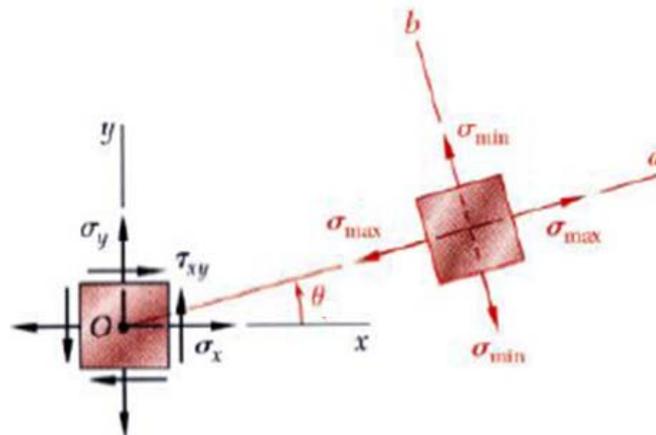


Figura 41 – Planos principais – (1)

7 - Com o círculo de Mohr definido, o estado de tensão para qualquer outra orientação pode ser encontrado.

8 - Para um estado de tensão a um ângulo  $\theta$  em relação aos eixos  $xy$ , construa um novo diâmetro  $X'Y'$  com um ângulo  $2\theta$  relativo ao diâmetro  $XY$ .

9 - As tensões normais e a tensão de cisalhamento para esta nova orientação são conseguidas pelas coordenadas de  $X'Y'$ .

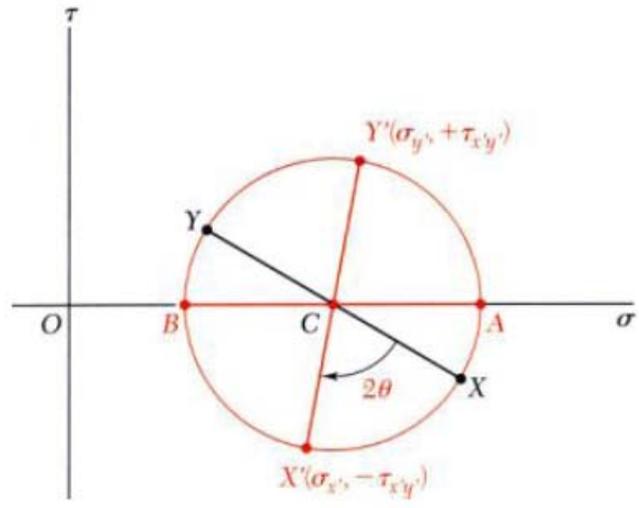


Figura 42 – Confeção do círculo de Mohr – (2)

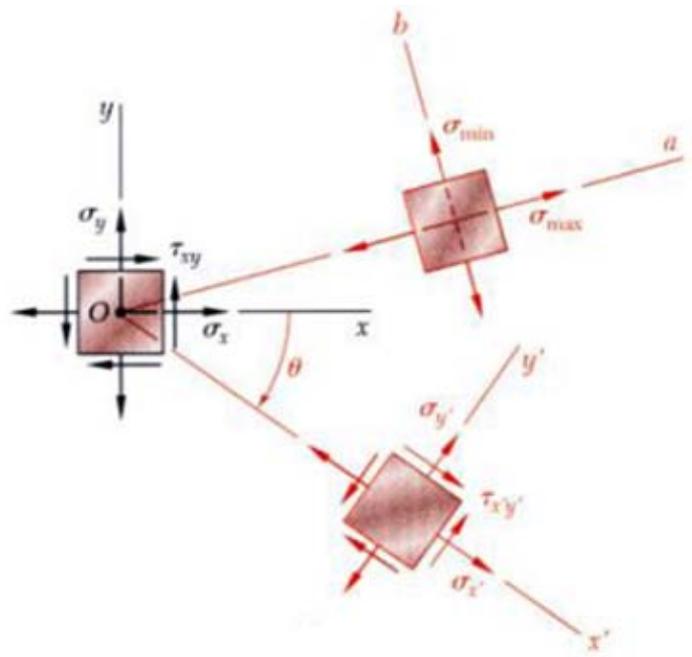
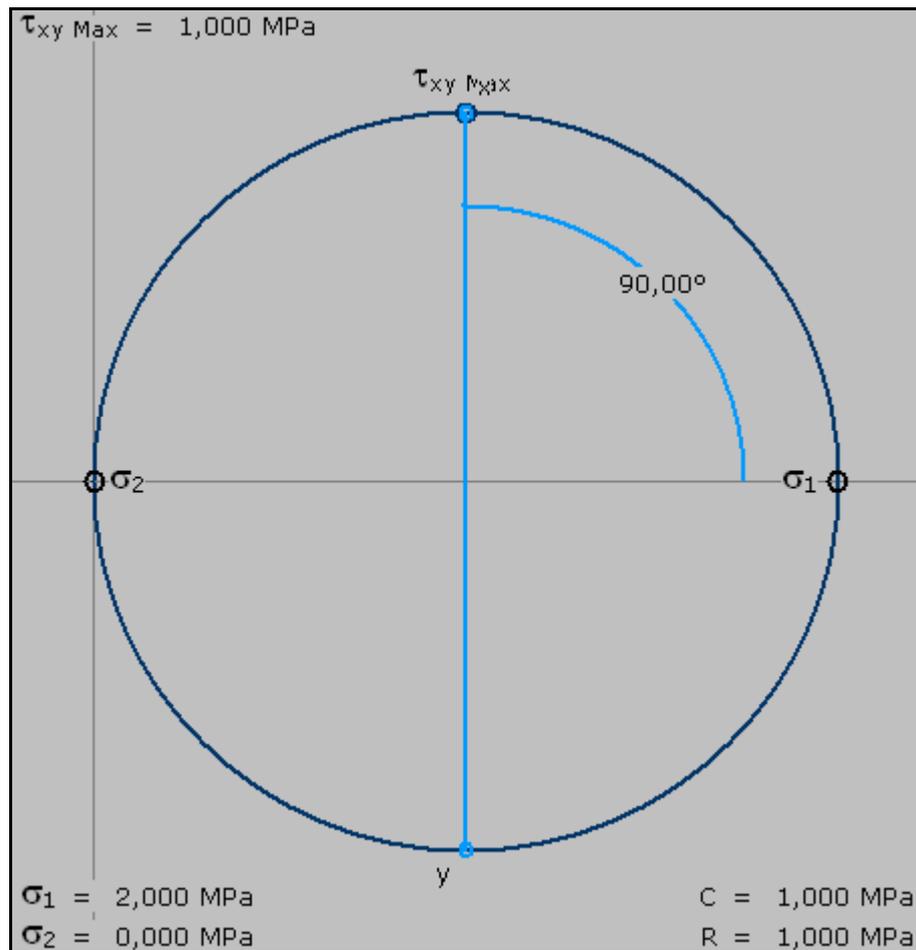
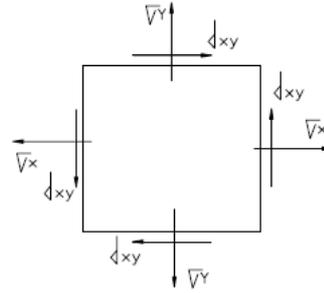


Figura 43 – Planos principais – (2)

### Exercício

Para o exercício anterior, trace o círculo de Mohr

$\sigma_x = +1\text{MPa}$ ;  $\sigma_y = +1\text{MPa}$  e  $\tau_{xy} = +1\text{MPa}$



## 6. TRANSFORMAÇÕES DAS DEFORMAÇÕES – ESTADO PLANO (EPD)

### 6.1 Introdução

Assim como realizado no capítulo anterior, e através da preconização da lei de Hooke convencional e da lei de Hooke no cisalhamento -  $\sigma = \varepsilon E$  e  $\tau = \gamma G$ , respectivamente - o presente capítulo tem por objetivo estudar o efeito das deformações no mesmo âmbito do estudo das tensões.

O estado geral das deformações em um ponto de um corpo pode ser definido como:

1. Deformação Normal:  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$
2. Deformação por Cisalhamento:  $(\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$

Essas seis componentes tendem a deformar cada face de um elemento material e variam de acordo com a orientação do mesmo.

A título de conhecimento geral; no laboratório, essas medidas são feitas através de extensômetros.

### 6.2 Estado Plano de Deformações

$(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \Rightarrow$  Duas componentes de deformação normal

$(\gamma_{xy}) \Rightarrow$  Uma componente de deformação por cisalhamento

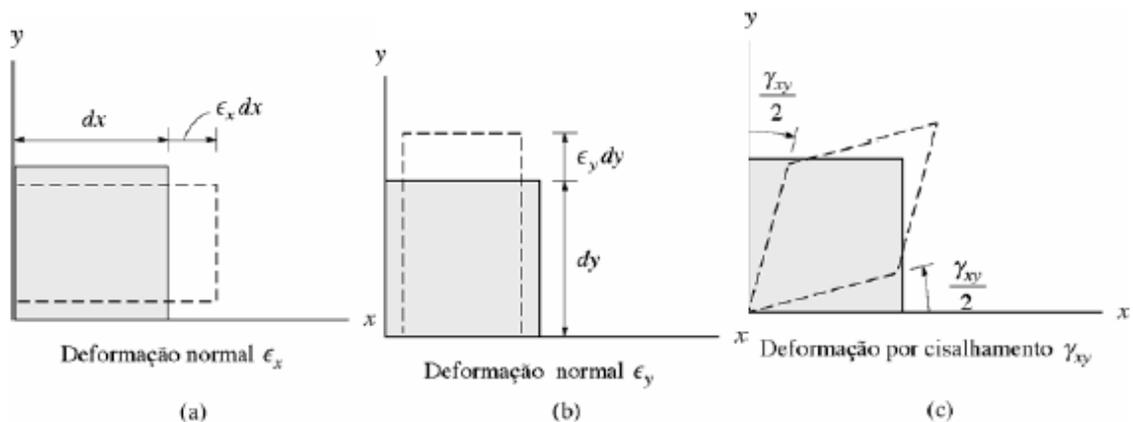


Figura 44 – Estado Plano de Deformações

O estado plano de deformações não causa um estado plano de tensões e vice-versa. Logo, o estado plano de tensões  $(\sigma_x, \sigma_y)$  não provoca estado plano de deformações no plano xy porque  $\varepsilon_z$  é diferente de zero (efeito de poisson).

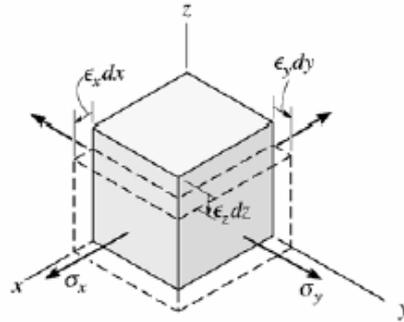


Figura 45 – Estudo das deformações

### 6.3 Equações Gerais de Transformação para o Estado Plano de Deformações

O objetivo principal é estabelecer equações de transformação que podem ser usadas para determinar as componentes de deformação normal e por cisalhamento  $x'$ , e  $y'$  em um ponto, desde que os componentes de deformação  $x$ ,  $y$  sejam conhecidos.

Para isso adotou-se a seguinte convenção de sinais:

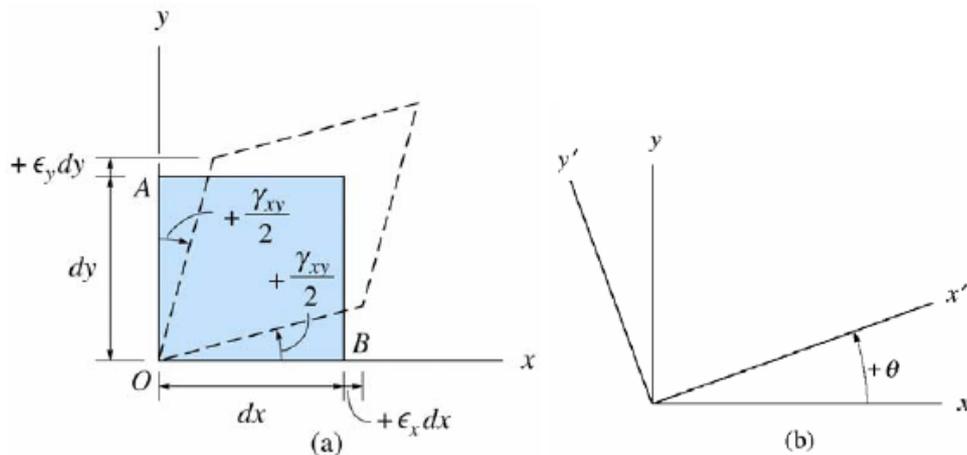


Figura 46 – Convenção de sinais positivos

### 6.4 Deformação Normal e por Cisalhamento

Determinação de  $\epsilon_{x'}$

$$dx = dx' \cos \theta$$

$$dy = dx' \sin \theta$$

Se  $\epsilon_x > 0$  (Figura 47b)  $\Rightarrow$  Alongamento de  $dx$  é  $\epsilon_x dx \Rightarrow$  Alongamento de  $dx'$  é  $\epsilon_x dx \cos \theta$

Se  $\epsilon_y > 0$  (Figura 47c)  $\Rightarrow$  Alongamento de  $dy$  é  $\epsilon_y dy \Rightarrow$  Alongamento de  $dx'$  é  $\epsilon_y dy \sin \theta$

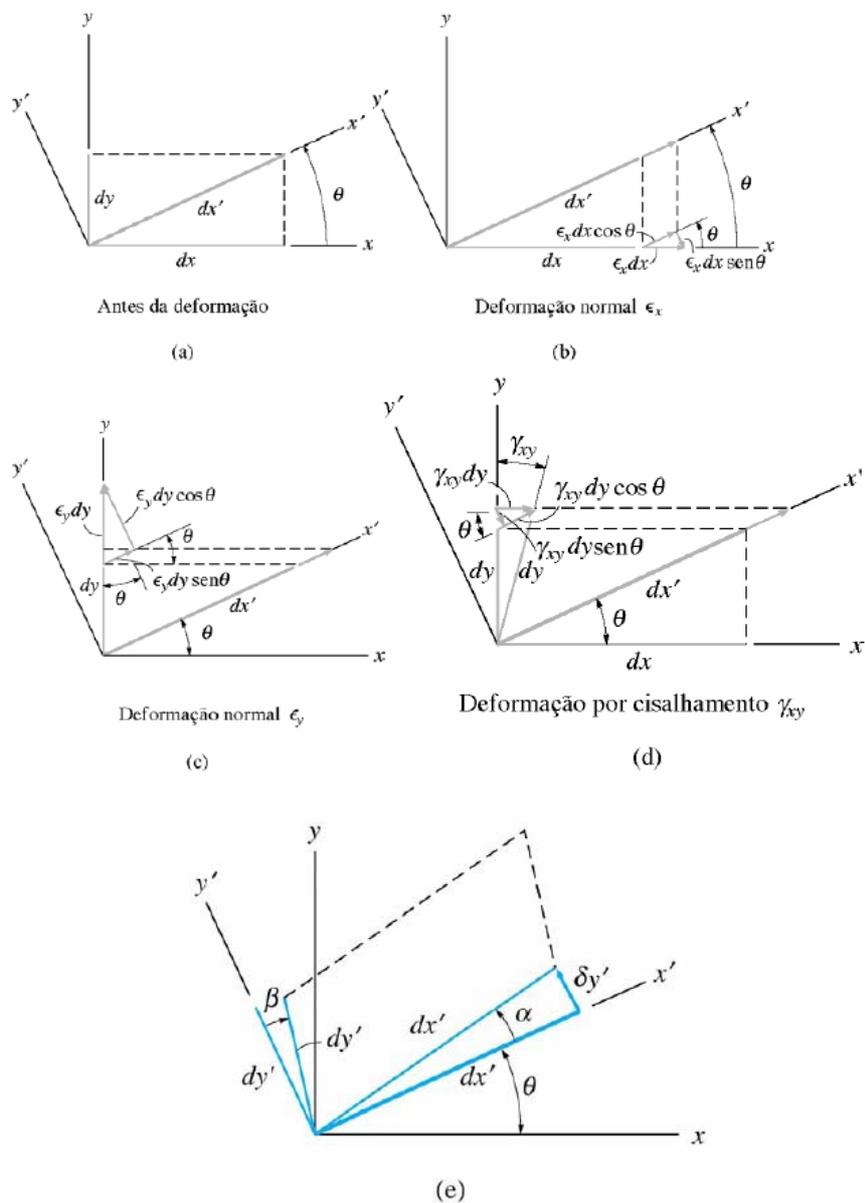


Figura 47 – Estudo das deformações

Se  $dx$  é fixo  $\Rightarrow$  Deslocamento  $\gamma_{xy}dy$  para a direita do topo da linha  $dy$  (figura 47d)  $\Rightarrow$  Alongamento de  $dx'$  é  $\gamma_{xy}dycos\theta$

Somando-se os três alongamentos:

$$\delta x' = \epsilon_x dx \cos \theta + \epsilon_y dy \sin \theta + \gamma_{yx} dy \cos \theta$$

Mas,

$$\epsilon_{x'} = \frac{\delta x'}{dx'}$$

Substituindo, temos:

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

A equação de transformação da deformação para determinar  $\gamma_{x'y'}$  é desenvolvida considerando-se a intensidade da rotação que cada segmento de reta  $dx'$  e  $dy'$  sofre quando submetido aos componentes da deformação  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ .

$$\alpha = \frac{\delta y'}{dx'}$$

$$\delta y' = -\epsilon_x dx' \operatorname{sen} \theta + \epsilon_y dy' \cos \theta - \gamma_{xy} dy' \operatorname{sen} \theta$$

Utilizando-se as equações acima, associadas à figura 47e, temos:

$$\alpha = (-\epsilon_x + \epsilon_y) \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \operatorname{sen}^2 \theta$$

Como mostra a figura 47e a reta  $dy'$  gira  $\beta$ . Podemos determinar esse ângulo por uma análise semelhante, ou simplesmente substituindo-se  $\theta$  por  $\theta + 90^\circ$ , e assim tem-se:

$$\beta = -(-\epsilon_x + \epsilon_y) \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \cos^2 \theta$$

$$\gamma_{x'y'} = \alpha - \beta$$

Dessa forma, as equações de transformação da deformação de um elemento, orientado com ângulo  $\theta$ , como mostra a figura 48, são:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

Para determinar  $\epsilon_{y'}$ , basta substituir  $\theta$  por  $(\theta + 90^\circ)$  na equação de  $\epsilon_{x'}$ , e assim tem-se:

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2(\theta + 90^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2(\theta + 90^\circ)$$

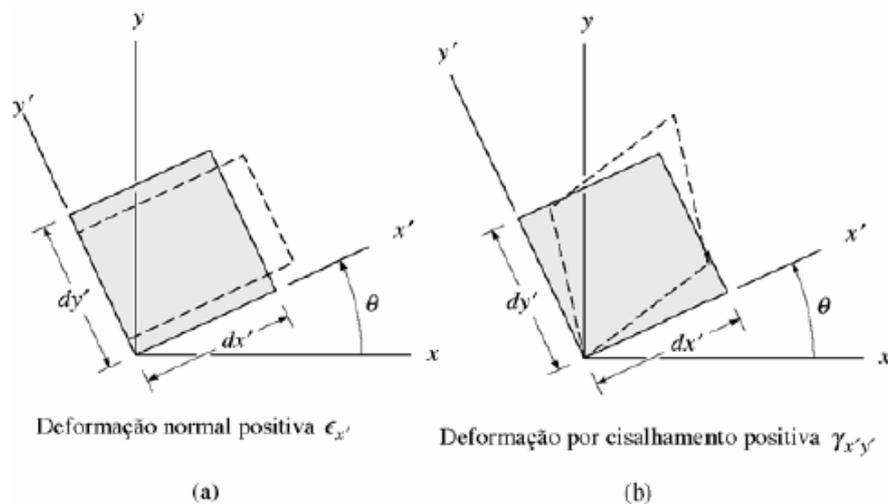


Figura 48 – Deformação normal e por cisalhamento

## 6.5 Deformações Principais

São deformações normais sem deformações por cisalhamento

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

## 6.6 Deformação por cisalhamento máxima no plano

$$\operatorname{tg} 2\theta' = -\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}}\right)$$

$$\gamma_{\text{máx}_\text{plano}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{méd}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$

## 6.7 Círculo de Mohr

No círculo de Mohr, independente se para análise de tensões ou de deformações, as equações acima podem ser escritas da seguinte forma:

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{méd}})^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 = R^2$$

onde

$$\varepsilon_{\text{méd}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

E o centro do círculo fica no ponto  $(\varepsilon_{\text{méd}}, 0)$ .

### Construção do Círculo

1. Estabelecer um sistema de coordenadas tal que a abscissa represente a deformação normal  $\varepsilon$ , com sentido positivo para a direita e a ordenada represente metade do valor da deformação por cisalhamento,  $\gamma/2$ , com sentido positivo para cima.

2. Determinar o centro do círculo C, que está localizado no eixo  $\varepsilon$  a uma distância  $\varepsilon_{\text{méd}} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$  da origem.

3. Marcar o ponto de referência A  $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$ .

4. Conectar o ponto  $A$  ao ponto  $C$  e determinar o raio  $R$  pelo triângulo sombreado.

5. Uma vez determinado  $R$ , traçar o círculo.

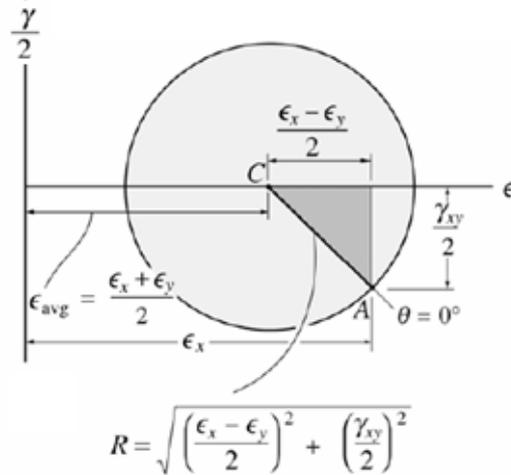


Figura 49 – Traçado do círculo de Mohr para as deformações

Deformações Principais

1. As deformações principais,  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são as coordenadas dos pontos  $B$  e  $D$  na figura 50a onde  $\gamma/2 = 0$ .

2. Determinar a orientação do plano sobre o qual  $\epsilon_1$  atua pelo círculo calculando  $2\theta_1$  por meio de trigonometria (medido no sentido anti-horário a partir da reta de referência radial  $CA$  até a reta  $CB$ ). Figura 50a. Lembrar que a rotação de  $\theta_1$  deve ser na mesma direção, a partir do eixo de referência do elemento  $x$  para o eixo  $x'$ . Figura 50b.

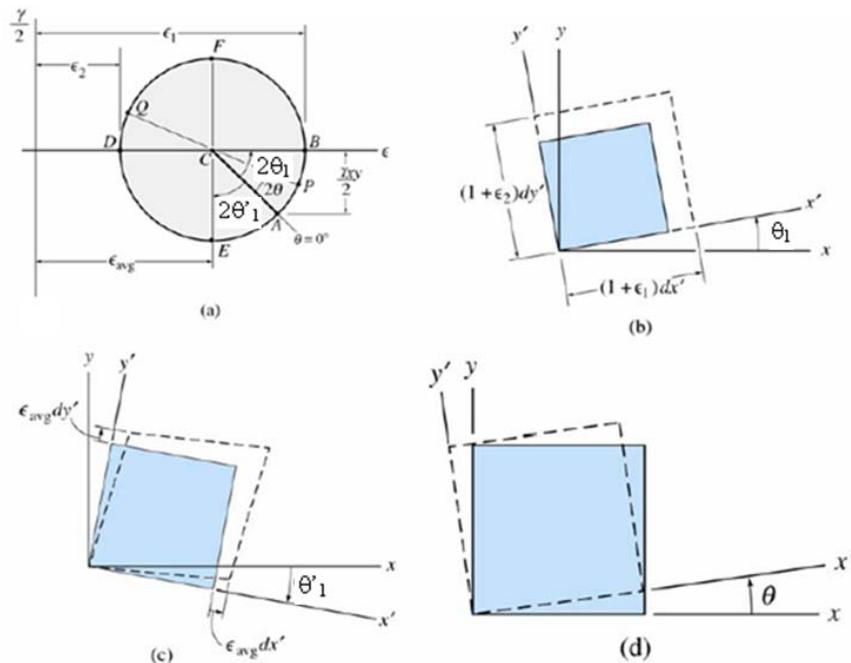


Figura 50 – Círculo de Mohr para as deformações

### Deformações por Cisalhamento Máximo no Plano

1. A deformação normal média e a metade da deformação por cisalhamento máxima no plano são determinadas como coordenadas E e F. Figura 50a.

2. Calcular  $2\theta'_1$  por meio de trigonometria (medido no sentido horário a partir da reta de referência radial CA até a Reta CE).

### Deformações no plano arbitrário

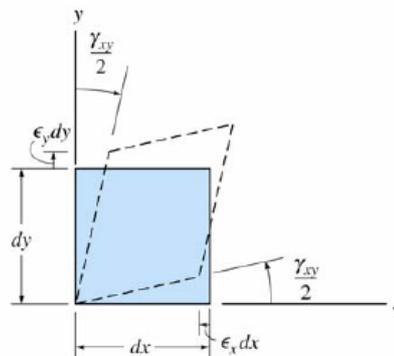
1. Para um plano especificado por um ângulo  $\theta$  utiliza-se trigonometria para se calcular a deformação normal e por cisalhamento.

2. O ângulo conhecido  $\theta$  do eixo  $x'$  é medido no círculo como  $2\theta$ .

3. Se for necessário saber o valor de  $\varepsilon_{y'}$ , determiná-lo calculando-se a coordenada  $\varepsilon$  do ponto Q. A reta CQ localiza-se a  $180^\circ$  de CP e, desse modo, representa uma rotação de  $90^\circ$  do eixo  $x'$ .

### Exercício

O elemento infinitesimal que representa um ponto do material está sujeito ao estado plano de deformações:  $\varepsilon_x = -350 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_y = +200 \times 10^{-6}$  e  $\gamma_{xy} = +80 \times 10^{-6}$ , o qual tende a torcê-lo como mostra a figura abaixo. Determinar as deformações principais no ponto e a orientação do elemento a elas correspondente.



### Resolução

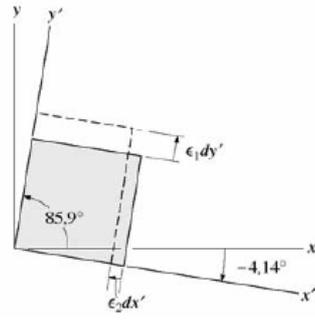
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{80 \times 10^{-6}}{-350 \times 10^{-6} - 200 \times 10^{-6}} = -0,145 \Rightarrow 2\theta = -8,28^\circ \Rightarrow \theta_1 = -4,14^\circ e$$

$$\theta_2 = -4,14^\circ + 90^\circ = 85,86^\circ$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-350 \times 10^{-6} + 200 \times 10^{-6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-350 \times 10^{-6} - 200 \times 10^{-6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{80 \times 10^{-6}}{2}\right)^2} =$$

$$\varepsilon_1 = -75 \times 10^{-6} - 278 \times 10^{-6} = -353 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = -75 \times 10^{-6} + 278 \times 10^{-6} = 203 \times 10^{-6}$$



## 7. DESLOCAMENTOS EM VIGAS E EIXOS – LINHA ELÁSTICA

Nos projetos estruturais são necessários os cálculos das tensões, mas também os cálculos das deformações a que estão submetidos os elementos estruturais. As normas de cálculo estabelecem as tensões admissíveis, mas também impõem limites para as deformações máximas das peças.

E é com o objetivo de avaliar as deformações em vigas e eixos, submetidos aos esforços de flexão, que estudaremos os métodos para determinação da linha elástica.

### 7.1. Introdução

Sob a ação de cargas transversais e/ou binários, uma viga fica submetida a dois tipos de efeitos principais:

- tensões normais e de cisalhamento nas diversas seções transversais, e
- deformações lineares e angulares ao longo de seu eixo.



Figura 51 – Deformação de uma viga submetida à flexão

### 7.2. Definições básicas

#### Flecha

Denomina-se flecha, num determinado ponto do eixo da viga, à componente vertical “y” do deslocamento linear do eixo da viga, em relação ao eixo reto inicial. Porém, a componente paralela ao eixo inicial da viga, é em geral, desprezível em comparação com a flecha.

#### Linha elástica (LE)

A curva na qual se transforma o eixo longitudinal da viga, inicialmente reto, quando submetida a carregamentos externos, recebe o nome de linha elástica. A equação da LE,  $y = f(x)$ , depende do tipo de carregamento a que uma determinada viga está submetida.

### 7.3. Determinação da linha elástica

Existem vários processos para se determinar a linha elástica LE. Os mais empregados são:

- a) Integração direta;
- b) Diagrama de momentos;

- c) Funções singulares e
- d) Energia elástica de deformação.

### Hipóteses e Limitações

- a viga deve estar trabalhando no regime elástico (Lei de Hooke);
- a viga possui eixo longitudinal inicialmente reto;
- os carregamentos são forças e/ou binários que atuam num plano perpendicular ao eixo longitudinal da viga (plano de simetria da viga);
- as seções transversais da viga permanecem planas durante a deformação;
- as vigas são prismáticas e possuem o mesmo módulo de elasticidade, tanto para tração como para compressão;
- as flechas são pequenas em relação às dimensões das seções transversais da viga;
- as flechas devidas à força cortante são desprezíveis em relação às produzidas pelo momento fletor.

Apesar de citarmos alguns métodos para determinação da linha elástica, no presente trabalho iremos focar apenas em um deles; o mais usual e importante, o **Método da integração direta**.

#### **7.4. Método da Integração direta**

Seja a viga AB representada na figura 52a. Após a flexão, seu eixo torna-se curvo. Suponha que "xy" seja um plano de simetria e que o carregamento atue nesse plano. A linha ACB situa-se nesse plano.

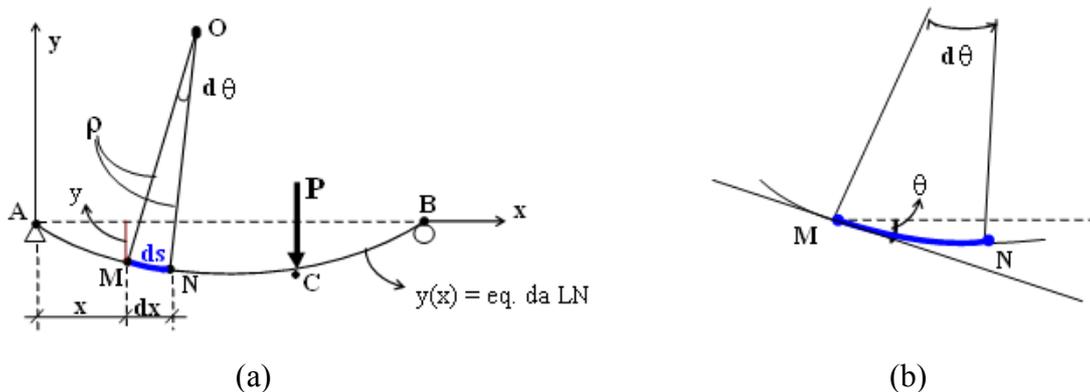


Figura 52 – Linha elástica da viga

A equação da curvatura "K" de uma viga submetida a um momento fletor "M" pode ser definida por:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

onde:

$K$  = curvatura da viga deformada;

$\rho$  = raio de curvatura da viga deformada;

$I$  = momento de inércia da seção transversal em relação à LN;

$E$  = módulo de elasticidade ou módulo de Young;

$EI$  = rigidez flexional.

Da figura 52, temos que o comprimento do arco  $ds$  é:

$$tg d\theta = \frac{ds}{\rho} \Rightarrow ds = tg d\theta \times \rho \approx \rho \times d\theta$$

$$ds = \rho \times d\theta \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

Igualando as duas equações acima, temos que:

$$k = \frac{d\theta}{ds}$$

Na maioria das aplicações práticas, as deflexões nas vigas são muito pequenas e suas linhas elásticas muito aplainadas (pouca inclinação); sendo assim, o ângulo  $\theta$  e a flecha são muito pequenos.

Pode-se admitir, portanto que:

$$ds \cong dx; \theta \cong tg \theta = \frac{dy}{dx} \quad \therefore \theta = \frac{dy}{dx}$$

Derivando a equação de  $\theta$  em relação à  $x$ , teremos:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

A partir daí, teremos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Resultando em:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow \text{(equação da linha elástica - v)}$$

A equação acima é a que permite obter a LE das vigas retas para qualquer tipo de carregamento.

### 7.5. Convenção de sinais

Na utilização das equações descritas anteriormente, é importante adotarmos os sinais de  $M$ ,  $V$  ou  $q$  (carga), estabelecidos pela convenção utilizada no desenvolvimento daquelas equações. A título de revisão, a figura 53a mostra esses esforços com seus sentidos positivos. Além disso, lembre-se de que o deslocamento positivo,  $v$ , é direcionado para cima e, como resultado, a inclinação  $\theta$  positiva será medida no sentido anti-horário a partir do eixo  $x$  positivo, quando este é orientado para a direita. A razão disso é mostrada na figura 53b. Nesta figura aumentos positivos de  $dx$  e  $dv$  em  $x$  e  $v$  geram aumento em  $\theta$  no sentido anti-horário. Por outro lado, se o eixo  $x$  positivo for direcionado para a esquerda,  $\theta$  será positivo no sentido horário, figura 53c.

Devemos destacar que, ao admitirmos que  $dv/dx$  é muito pequeno, o comprimento horizontal original do eixo da viga e o arco de sua linha elástica serão praticamente idênticos. Conseqüentemente, podemos admitir que os pontos da linha elástica se desloquem apenas na direção vertical, e não na horizontal. Já que o ângulo de inclinação  $\theta$  será também muito pequeno, seu valor em radianos pode ser determinado diretamente a partir de  $\theta \approx \text{tg}\theta = dv/dx$ .

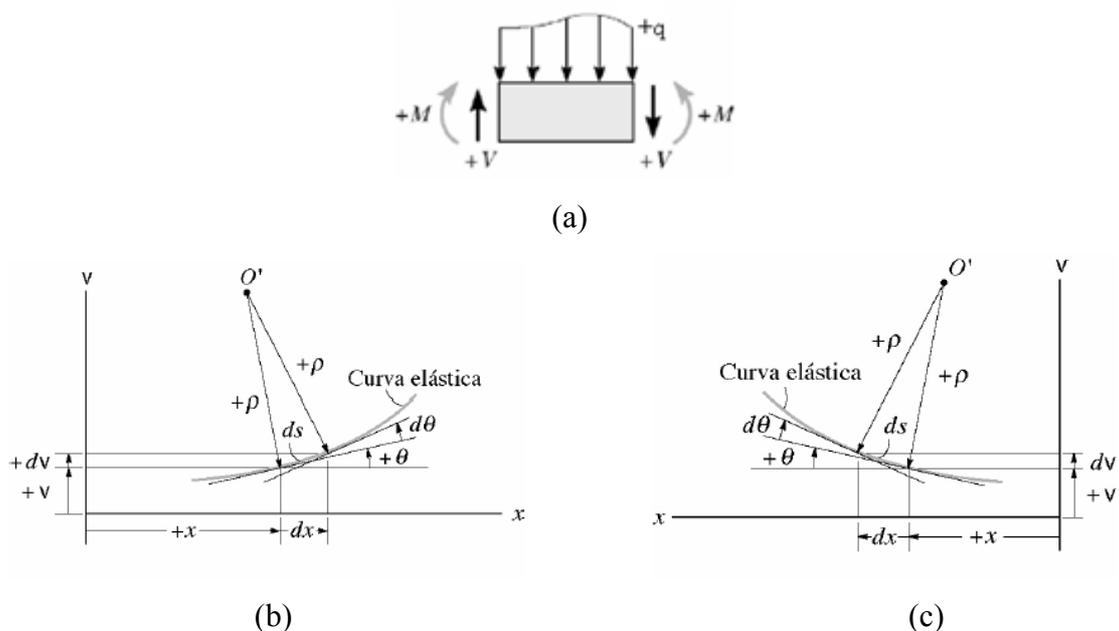


Figura 53 – Convenção de sinais positivos

### 7.6. Condições de contorno e de continuidade

As constantes de integração são determinadas pelos valores das funções

representativas do cisalhamento, do momento fletor, da inclinação ou dos deslocamentos ocorrentes em um ponto particular da viga em que grandezas sejam desconhecidas. Esses valores são chamados de condições de contorno. As condições de contorno utilizadas com mais frequência na solução dos problemas de deslocamentos de vigas ou eixos são listadas na figura 54.

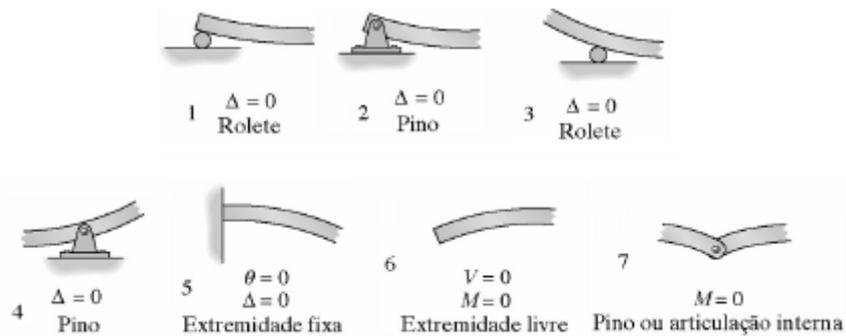


Figura 54 – Condições de contorno

Agora, se uma única coordenada  $x$  não puder ser utilizada para expressar a equação da inclinação da viga ou da linha elástica, deveremos utilizar as condições de continuidade na avaliação de algumas das constantes de integração. Por exemplo, para a viga mostrada na figura 55, o ponto  $C$ , independente da equação descrita ( $AC$  ou  $CB$ ), deve apresentar o mesmo valor para flecha  $v$ , e inclinação  $\theta$ .

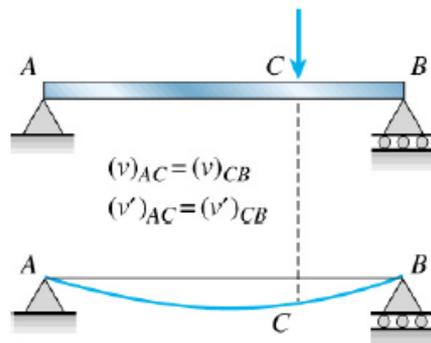


Figura 55 – Condições de continuidade

### 7.7. Processo de integração - Resumo

A determinação da LE consiste em integrar a equação  $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$ .

- (a) Antes da integração, deve-se definir  $EI$  e  $M$  em função de  $x$ ;
- (b) A primeira integração fornece a inclinação,  $dy/dx$ , da tangente à LE;
- (c) A segunda integração fornece a LE em função de  $x$ :  $y=f(x)$ .

Sendo a equação diferencial da LE de 2ª ordem, aparecem na integração, algumas constantes.

Estas constantes são obtidas, através do conhecimento das flechas e rotações da LE, em pontos convenientemente escolhidos da viga.

Na análise de vigas contínuas, são necessárias, normalmente, duas ou mais equações para exprimir o diagrama de momentos fletores ao longo de toda a viga.

Para cada região da viga haverá uma correspondente equação da LE, que fornecerá duas constantes para cada uma dessas regiões.

Estas constantes são determinadas através da condição de continuidade existente entre pontos comuns de regiões adjacentes, que possuem flechas e rotações comuns.

### 7.8. Superposição de Efeitos

A superposição de efeitos é usada para se determinar a deflexão em vigas e eixos submetidos a carregamentos complexos através da:

- obtenção da deflexão correspondente a cada carga, agindo separadamente;
- soma das deflexões (contribuições) provocadas pelas cargas individuais.

Outro fator importante, é que este método pode ser usado quando:

- a carga for linearmente relacionada à deflexão;
- a carga não mudar significativamente a geometria ou a configuração original da viga.

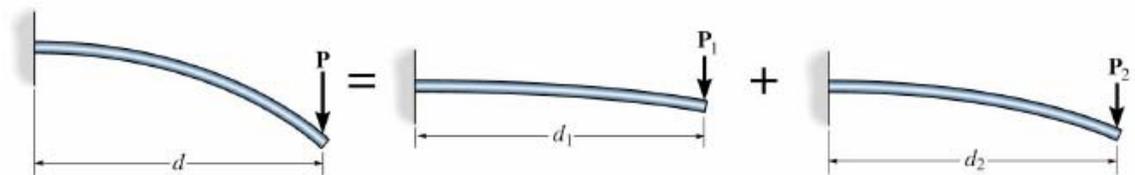


Figura 56 – Superposição de efeitos – Flecha e inclinação de P é igual a flecha e inclinação de  $P_1 + P_2$

Em resumo, a deflexão e/ou inclinação em ponto de uma viga ou eixo com várias cargas distintas é igual à soma algébrica das deflexões e inclinações provocadas pelas cargas agindo individualmente.

## 7.9. Tabelas de flechas e deflexões (inclinações)

Tabela de flechas e deflexões angulares para algumas vigas isostáticas

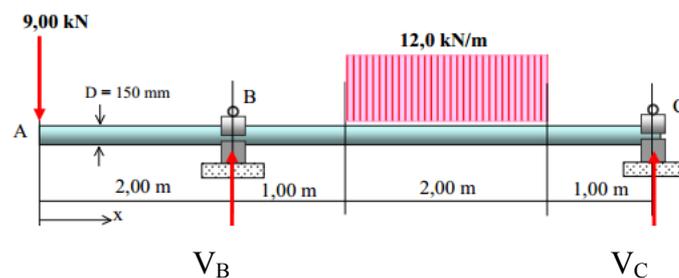
Viga	Carregamento e Vinculação (comprimento L)	Deflexão angular na extremidade	Flecha Máxima + ↑
1		$\varphi = -PL^2 / 2EI$	$f = - PL^3 / 3 EI$
2		$\varphi = -qL^3 / 6EI$	$f = - qL^4 / 8 EI$
3		$\varphi = -wL^3 / 24EI$	$f = - wL^4 / 30 EI$
4		$\varphi = + ML / EI$	$f = + ML^2 / 2 EI$
5		$\varphi_A = -PL^2 / 16 EI$ $\varphi_B = +PL^2 / 16 EI$	$f = - PL^3 / 48 EI$
6		$\varphi_A = -Pb(L^2 - b^2) / 6 LEI$ $\varphi_B = +Pa(L^2 - a^2) / 6 LEI$	$f = \frac{-Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3} LEI}$ para $x_m = \sqrt{(L^2 - b^2)}/3$
7		$\varphi_A = - qL^3 / 24 EI$ $\varphi_B = + qL^3 / 24 EI$	$f = - 5 q L^4 / 384 EI$
8		$\varphi_A = \frac{P}{2} \frac{a(L - a)}{2EI}$	$f = \frac{P}{2} \frac{a(3L^2 - 4a^2)}{24EI}$
9		$\varphi_A = - ML / 6 EI$ $\varphi_B = + ML / 3 EI$	$f = - ML^2 / 9\sqrt{3} EI$ para $x_m = L / \sqrt{3}$

Tabela de reações vinculares e flechas para algumas vigas hiperestáticas

Viga	Carregamento e Vinculação (comprimento L)	Reações Vinculares e Momentos Máximos	Flecha Máxima + ↑
1		$A = (11/16)P$ $B = (5/16)P$ $M = (3/16)PL$ $(M_{MAX})(+) = +(5/32)PL$ $(M_{MAX})(-) = -(3/16)PL$	$f = - 7PL^3 / 768 EI$
2		$A = (3/8)qL$ $B = (5/8)qL$ $M = qL^2/8$ $(M_{MAX})(+) = (9/128)qL^2$ $(M_{MAX})(-) = - qL^2/8$	$f = - qL^4 / 185 EI$
3		$A = B = (1/2)P$ $M = (1/8)PL$ $(M_{MAX})(+) = +(1/8)PL$ $(M_{MAX})(-) = -(1/8)PL$	$f = - PL^3 / 192 EI$
4		$A = B = (1/2)P$ $M = qL^2/12$ $(M_{MAX})(+) = + qL^2/24$ $(M_{MAX})(-) = - qL^2/12$	$f = - qL^4 / 384 EI$
5		$A = B = (5/32)P$ $C = (11/16)P$ $(M_{MAX})(+) = +(5/128)PL$ $(M_{MAX})(-) = -(3/64)PL$	a ser calculada pelo estudante <i>(observe a equivalência entre o trecho CB da viga 5 e o trecho AB da viga 1)</i>
6		$A = B = (3/16)qL$ $C = (5/8)qL$ $(M_{MAX})(+) = +(9qL^2/512)$ $(M_{MAX})(-) = - qL^2/32$	$f = - qL^4 / 2960 EI$
7		$A = B = (3/2)M/L$ $M_A = M_B = M/4$	$f = \pm M / 216 EI$ em $x = L/3$
8		$A = B = (12EI/L^3) \delta$ $M_A = M_B = (6EI/L^2) \delta$	$\delta \rightarrow$ recalque do apoio

Exercício

Para a viga ABC mostrada abaixo, de aço, com módulo de elasticidade longitudinal  $E = 200$  GPa, de seção maciça circular, com diâmetro nominal igual a 150 mm, determine as flechas na extremidade do balanço, ponto A, e no centro do vão, entre os apoios B e C.



Reações de apoio

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -9 \times 2 + 12 \times 2 \times 2 - V_C \times 4 = 0 \rightarrow V_C = 7,5kN$$

$$\sum V = 0 \rightarrow +9 + 12 \times 2 - V_B - 7,5 = 0 \rightarrow V_B = 25,5kN$$

Equação do momento fletor  $\rightarrow v'' = \frac{M}{EI}$

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x) = -9x$$

$$2 \leq x \leq 3 \rightarrow M(x) = -9x + 25,5(x - 2) = 16,5x - 51$$

$$3 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x) = -9x + 25,5(x - 2) - \frac{12}{2}(x - 3)(x - 3) = -6x^2 + 52,5x - 105$$

$$5 \leq x \leq 6 \rightarrow M(x) = -9x + 25,5(x - 2) - 24(x - 4) = -7,5x + 45$$

Equação da inclinação angular  $\rightarrow v' = \theta$  (1ª integração)

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow \theta(x) = -\frac{9x^2}{2} + c1 = -4,5x^2 + c1$$

$$2 \leq x \leq 3 \rightarrow \theta(x) = \frac{16,5x^2}{2} - 51x + c2 = 8,25x^2 - 51x + c2$$

$$3 \leq x \leq 5 \rightarrow \theta(x) = -\frac{6x^3}{3} + \frac{52,5x^2}{2} - 105x + c3 = -2x^3 + 26,25x^2 - 105x + c3$$

$$5 \leq x \leq 6 \rightarrow \theta(x) = -\frac{7,5x^2}{2} + 45x + c4 = -3,75x^2 + 45x + c4$$

Equação da flecha  $\rightarrow v$  (2ª integração)

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow v(x) = -\frac{4,5x^3}{3} + c1x + c5 = -1,5x^3 + c1x + c5$$

$$2 \leq x \leq 3 \rightarrow v(x) = \frac{8,25x^3}{3} - \frac{51x^2}{2} + c2x + c6 = 2,75x^3 - 25,5x^2 + c2x + c6$$

$$3 \leq x \leq 5 \rightarrow v(x) = -\frac{2x^4}{4} + \frac{26,25x^3}{3} - \frac{105x^2}{2} + c3x + c7 =$$

$$= -0,5x^4 + 8,75x^3 - 52,5x^2 + c3x + c7$$

$$5 \leq x \leq 6 \rightarrow v(x) = -\frac{3,75x^3}{3} + \frac{45x^2}{2} + c4x + c8 = -1,25x^3 + 22,5x^2 + c4x + c8$$

Condições de Contorno e Continuidade

1) Para  $x=2 \rightarrow v=0 \rightarrow -1,5 \cdot 2^3 + c1 \cdot 2 + c5 = 0 \Rightarrow c5 = -2c1 + 12$

$$2,75 \cdot 2^3 - 25,5 \cdot 2^2 + c2 \cdot 2 + c6 = 0 \Rightarrow c6 = -2c2 + 80$$

2) Para  $x=6 \rightarrow v=0 \rightarrow -1,25 \cdot 6^3 + 22,5 \cdot 6^2 + c4 \cdot 6 + c8 = 0 \Rightarrow c8 = -6c4 - 540$

3) Para  $x=2$  (continuidade em  $\theta$ )

$$-4,5 \cdot 2^2 + c1 = 8,25 \cdot 2^2 - 51 \cdot 2 + c2 \Rightarrow c1 = c2 - 51$$

4) Para  $x=3$  (continuidade em  $\theta$ )

$$8,25 \cdot 3^2 - 51 \cdot 3 + c2 = -2 \cdot 3^3 + 26,25 \cdot 3^2 - 105 \cdot 3 + c3 \Rightarrow c2 = c3 - 54$$

5) Para  $x=5$  (continuidade em  $\theta$ )

$$-2 \cdot 5^3 + 26,25 \cdot 5^2 - 105 \cdot 5 + c3 = -3,75 \cdot 5^2 + 45 \cdot 5 + c4 \Rightarrow c3 = c4 + 250$$

$$c1 = (c3 - 54) - 51 \Rightarrow c1 = c4 + 250 - 105 \Rightarrow c1 = c4 + 145$$

6) Para  $x=2$  (continuidade em  $v$ )

$$-1,5 \cdot 2^3 + c1 \cdot 2 + c5 = 2,75 \cdot 2^3 - 25,5 \cdot 2^2 + c2 \cdot 2 + c6 \Rightarrow 2c1 + c5 = 2c2 + c6 - 68$$

7) Para  $x=3$  (continuidade em  $v$ )

$$2,75 \cdot 3^3 - 25,5 \cdot 3^2 + c2 \cdot 3 + c6 = -0,5 \cdot 3^4 + 8,75 \cdot 3^3 - 52,5 \cdot 3^2 + c3 \cdot 3 + c7 \Rightarrow$$

$$3c2 + c6 = 3c3 + c7 - 121,5$$

8) Para  $x=5$  (continuidade em  $v$ )

$$-0,5 \cdot 5^4 + 8,75 \cdot 5^3 - 52,5 \cdot 5^2 + c3 \cdot 5 + c7 = -1,25 \cdot 5^3 + 22,5 \cdot 5^2 + c4 \cdot 5 + c8 \Rightarrow$$

$$5c3 + c7 = 5c4 + c8 + 937,5$$

Resolvendo o Sistema Matemático

$$\left\{ \begin{array}{l} c5 = -2c1 + 12 \\ c6 = -2c2 + 80 \\ c8 = -6c4 - 540 \\ c1 = c2 - 51 \\ c2 = c3 - 54 \\ c1 = c4 + 145 \\ 2c1 + c5 = 2c2 + c6 - 68 \\ 3c2 + c6 = 3c3 + c7 - 121,5 \\ 5c3 + c7 = 5c4 + c8 + 937,5 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow 3c2 - 2c2 + 80 = 3c2 + 162 + c7 - 121,5 \Rightarrow 2c2 = -c7 + 39,5$$

$$\rightarrow c7 = 5c4 + c8 + 937,5 - 5c3 \Rightarrow c7 = 5c4 + c8 + 937,5 - 5c2 - 270$$

$$\rightarrow c7 = 5c4 - 6c4 - 540 + 937,5 - 5c2 - 270 \Rightarrow c7 = -c4 - 5c2 + 127,5$$

$$\rightarrow c7 = -c1 + 145 - 5c2 + 127,5 \Rightarrow c7 = -c2 + 51 + 145 - 5c2 + 127,5$$

$$\rightarrow c7 = -6c2 + 323,5 \Rightarrow 2c2 = 6c2 - 323,5 + 39,5 \Rightarrow 4c2 = 284 \Rightarrow c2 = 71$$

$$\rightarrow c6 = -142 + 80 = -62$$

$$\rightarrow c1 = 71 - 51 = 20$$

$$\rightarrow c3 = 71 + 54 = 125$$

$$\rightarrow c5 = -40 + 12 = -28$$

$$\rightarrow c4 = 20 - 145 = -125$$

$$\rightarrow c7 = -142 + 39,5 = -102,5$$

$$\rightarrow c8 = 750 - 540 = 210$$

Rigidez EI

$$E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \text{ e } I = \frac{\pi D^4}{65} = \frac{\pi \cdot 0,15^4}{64} = 2,485 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \Rightarrow EI = 4970 \text{ kN x m}^2$$

Flecha na ponta do balanço

$$v(0) = \frac{-1,5 \cdot 0^3 + 20 \cdot 0 - 28}{4970} = -0,00563 \text{ m} = -5,63 \text{ mm}$$

Flecha no meio do vão

$$v(4) = \frac{-0,5 \cdot 4^4 + 8,75 \cdot 4^3 - 52,5 \cdot 4^2 + 125 \cdot 4 - 102,5}{4970} = -0,00211 \text{ m} = -2,11 \text{ mm}$$

Aferição no programa Sap 2000



## 8. FLAMBAGEM DE COLUNAS

### 8.1. Introdução

De forma bastante comum ocorre confusão na hora de diferenciar dois importantes conceitos: equilíbrio e estabilidade. Uma estrutura pode ser instável estando em equilíbrio.

Em geral, o equilíbrio de uma estrutura pode ser classificado como:

- estável;
- instável ou
- neutro.

Um modo bastante simples de observar este fato é analisar as três situações de equilíbrio apresentadas na figura 57.



Figura 57 – Situações de equilíbrio

A primeira situação representa o equilíbrio estável. Nela, ao se aplicar uma força na esfera, que está sobre uma superfície curva, acarretará um deslocamento tal qual, fará com que a esfera role sobre essa superfície, oscilando em torno da posição de equilíbrio inicial. Na segunda situação, o equilíbrio é instável. Uma força promove um deslocamento na esfera que rola sobre a superfície, não existindo mais a possibilidade de retorno a esta posição de equilíbrio. Uma estrutura com este tipo de equilíbrio não suporta perturbações de nenhuma natureza. Na terceira situação, o equilíbrio é neutro. Uma força qualquer promove um deslocamento na esfera, que rola sobre o plano em que ela está apoiada, ocasionando uma nova posição de equilíbrio, semelhante à posição original, porém em outro ponto qualquer do plano.

### 8.2. Carga crítica de barras comprimidas

Seja uma barra prismática comprimida, em equilíbrio, como a mostrada na figura 58.

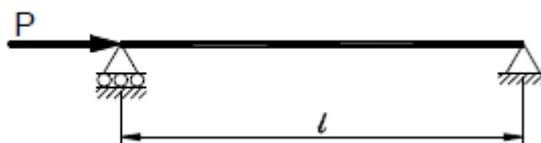


Figura 58 – Barra comprimida em equilíbrio

Quando a força tem valores pequenos, a barra permanece reta e o equilíbrio é estável. Quando ocorre um determinado aumento no valor desta força, podem aparecer flechas nas seções da barra levando a barra para um novo equilíbrio estável, como representa a figura 59.

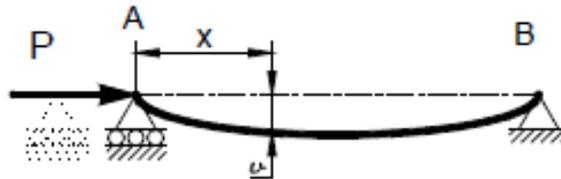


Figura 59 – Barra comprimida em uma nova situação de equilíbrio

A passagem do primeiro estado de equilíbrio estável para o outro, ocorre quando a força atinge um determinado valor que é chamado de *valor crítico*. Nessa situação a carga é chamada de Carga Crítica e indicada por  $P_{crit}$ .

Quando a carga está no valor crítico o equilíbrio torna-se instável.

Nos dimensionamentos das estruturas é importante que este valor crítico não seja alcançado. Com isto, se garante, além da integridade, a estabilidade da estrutura.

#### Determinação da Carga Crítica

Na figura 59, se observa a ocorrência de flechas nas seções da barra. Torna-se possível, então escrever a equação da linha elástica para a barra.

$$-\frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Para uma seção qualquer, com distância igual a  $x$ , a partir do apoio A, o momento fletor vale  $M = P \cdot v$  que, substituído na expressão acima, resulta:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Pv}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{Pv}{EI} = 0$$

A expressão acima é uma diferencial de segunda ordem cuja solução é:

$$v = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \text{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que devem ser determinadas de maneira a satisfazer as condições de deslocamento das extremidades apoiadas; ou seja:

$$\text{para } x=0 \Rightarrow v=0 \text{ e para } x=l \Rightarrow v=0$$

$$\text{Com } x=0, \text{ se tem } 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \text{sen} 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Com este resultado temos a seguinte simplificação da equação:

$$v = C_2 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right)$$

Com  $x = l$ , tem-se:

$$v = C_2 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} l \right)$$

Note-se, aqui, que para satisfazer a equação, independentemente do valor de  $C_2$ , a função seno deve ser igual a zero. Esta função é nula quando o ângulo for igual a  $n\pi$ , ou seja:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} l = n\pi$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Assim, tem-se:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} l = n\pi \Rightarrow \frac{P}{EI} l^2 = n^2 \pi^2 \Rightarrow P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

Note-se que  $n$  é um número inteiro, positivo, qualquer entre 1 e  $\infty$ . Para cada valor de  $n$  existe um valor de  $P$  que muda o estado de equilíbrio. Cada um destes valores é indicado por  $P_{crit}$ .

Desta forma:

$$n = 1 \Rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$n = 2 \Rightarrow P_{crit} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

É muito importante observar que estas cargas críticas são as cargas que mudam o estado de equilíbrio. Assim, a carga crítica encontrada para  $n=1$  muda o estado de equilíbrio de uma barra reta para uma barra que tem a forma da figura 60. Nesta situação se diz que ocorreu a flambagem da barra por compressão.

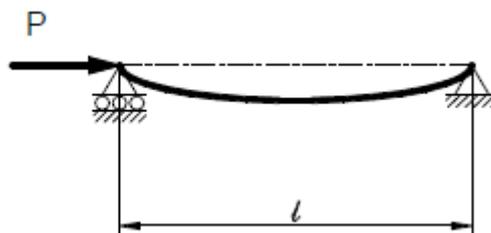


Figura 60 – Barra flambada com  $P_{crit}$  para  $n=1$

A carga crítica encontrada para  $n=2$  muda o estado de equilíbrio de uma barra que tem a forma da figura 59 para uma que tem a forma da figura 61.

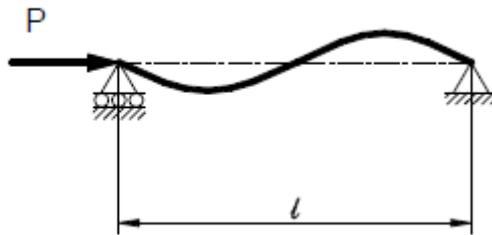


Figura 61 – Barra flambada com  $P_{crit}$  para  $n=2$

Para as estruturas, em geral, se interessa descobrir a carga crítica para  $n=1$ .

Para extrapolar as equações da carga crítica para barras com outros tipos de apoio, devemos avaliar diferentemente (como será visto adiante).

#### Equação de Eüler

Toma-se, inicialmente a expressão da carga crítica para a flambagem de uma barra prismática, simplesmente apoiada em suas extremidades.

Lembrando-se, mais uma vez, que a carga crítica é aquela que muda o estado de equilíbrio; assim, com cargas de menor valor, a barra permanece reta; e com cargas de maior valor, ela flamba com a forma da figura 60, até que o valor seja igual ao da encontrada para  $n=2$ .

Lembrando ainda, que esta carga é uma força normal de compressão, o módulo da tensão normal desenvolvida nos pontos das seções transversais da barra é:

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \sigma_{fl}$$

onde  $A$  é a área da seção transversal da barra.

A esta tensão se dá o nome de Tensão de Flambagem que é indicada por  $\sigma_{fl}$ .

A tensão de flambagem é, portanto a tensão que muda o estado de equilíbrio da barra, ou seja, com tensões iguais a este valor o equilíbrio é instável.

Substituindo o valor da carga crítica, na expressão acima, tem-se:

$$\sigma_{fl} = \sigma_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$$

Sabendo-se que o raio de giração de uma seção é igual a:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \Rightarrow i^2 = \frac{I}{A}$$

Temos:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2}$$

onde  $l$  é o comprimento da barra e  $i$  é uma propriedade de sua seção transversal.

Podemos então escrever a expressão acima, como:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\frac{l^2}{i^2}} \Rightarrow \sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

Nessa expressão o quociente  $l/i$  é chamado de índice de esbeltez da barra e indicado pela letra  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{l}{i}$$

O índice de esbeltez é uma medida relativa entre o comprimento da barra e sua seção transversal. Uma barra é esbelta quando seu comprimento é grande em relação a sua seção transversal. Assim;

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Esta expressão é conhecida como Equação de Eüler.

#### Observações

1) A tensão de flambagem é um valor de tensão que, se atingido, muda o estado de equilíbrio da barra, isto é; a barra flamba.

2) Para que em uma barra não ocorra a flambagem, o valor de tensão desenvolvida pela força de compressão atuante, deve ser menor que o da tensão de flambagem.

Isto é:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{fl \text{ (admissível)}}$$

onde  $\sigma_{fl \text{ (admissível)}}$  pode ou não ter embutido em sua expressão, algum fator de segurança.

3) O estudo do raio de giração é de grande importância já que, se não existir restrição, a barra tende a flambar de maneira que a seção gire em torno do eixo central de inércia de menor momento e portanto, de menor raio de giração.

4) A mudança na forma de apoio da barra, provoca alteração na solução das expressões, por causa do comprimento  $l$ , que é na verdade o comprimento de flambagem  $l_{fl}$ . Esta alteração pode ser expressa por meio do índice de esbeltez.

5) A fórmula geral do índice de esbeltez é:

$$\lambda = \frac{kl}{i} = \frac{l_{fl}}{i}$$

onde  $k$  é um coeficiente que depende da forma de apoio da barra. Por sua vez, dá origem ao comprimento fictício  $l_{fl}$  (ou comprimento de flambagem).

6) Os valores de  $k$  para diferentes formas de apoio são as mostradas na figura 62, e comprovadas no ensaio da figura 63.

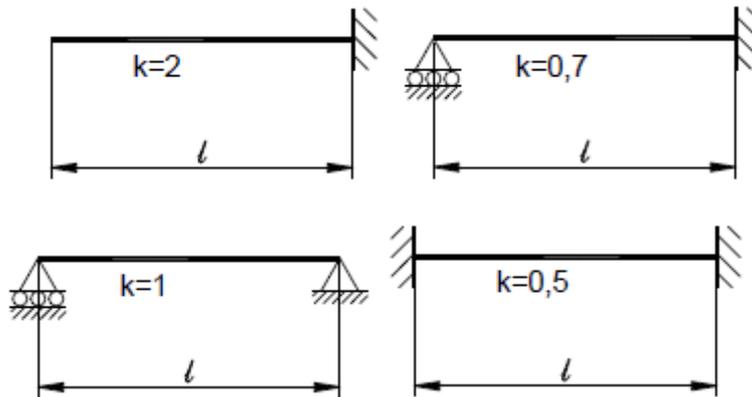


Figura 62 – Coeficientes  $k$  para diferentes tipos de apoio

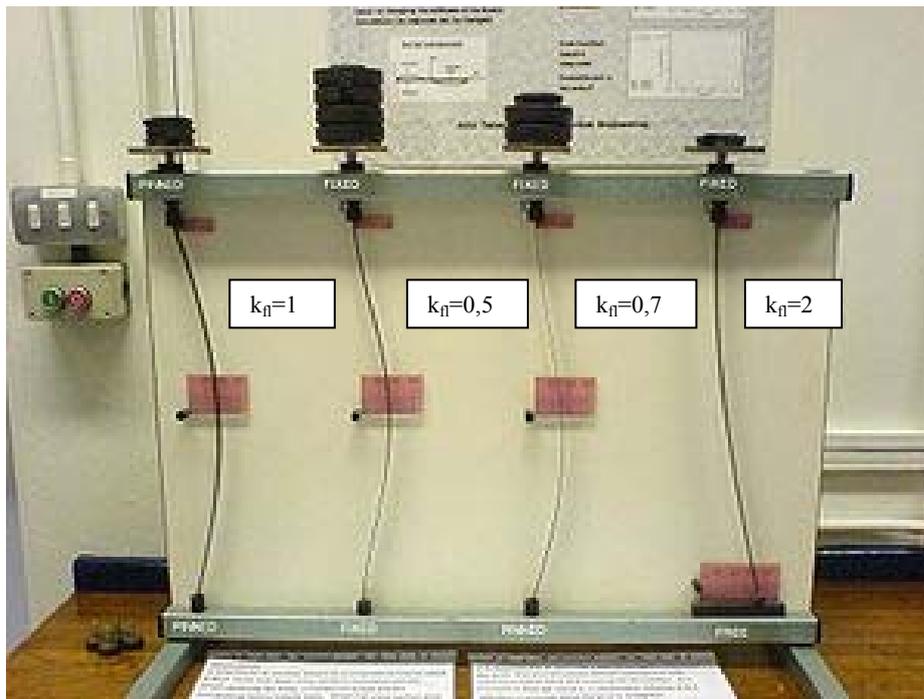


Figura 63 – Ensaio para determinação do comprimento de flambagem ou comprimento fictício  $l_{fl}$

Todas as fórmulas vistas até agora; baseadas no estudo proposto por Eüler; fazem referência à análise elástica, onde as deformações iniciais são iguais às deformações finais (sem resíduos). Porém, outro tipo de flambagem pode ocorrer em nossas colunas ou qualquer outra estrutura comprimida.

Estas colunas apresentam características inelásticas, já que ocorrem deformações residuais após a sua solicitação (vide próximo item).

Quanto maior for o índice de esbeltez da estrutura, maior é o viés da carga ou tensão crítica ser preconizada pela hipérbole de Eüler, e conseqüentemente apresentar-se como flambagem elástica.

O índice de esbeltez que leva ao início da flambagem elástica (início da hipérbole de Eüler) é denominado índice de esbeltez limite, também conhecido como “lâmbda” limite; e é dado pela seguinte equação:

$$\lambda_{\text{lim}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}$$

onde:

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material

$\sigma_P$  é a tensão limite de proporcionalidade (tensão máxima regida pela lei de Hooke, e retira do gráfico tensão x deformação)

Assim, toda coluna que apresentar índice de esbeltez menor que o lâmbda limite estará sujeita à flambagem inelástica ( $\lambda < \lambda_{\text{lim}}$ ); e quando apresentar índice de esbeltez maior que o lâmbda limite estará sujeita à flambagem elástica ou de Eüler ( $\lambda > \lambda_{\text{lim}}$ ).

### Flambagem Inelástica

A solução de problemas referentes à flambagem não elástica, inelástica ou plástica, divide-se em três itens:

1. Teoria do módulo tangente (materiais que tem  $\sigma_E$  bem definido – por exemplo os aços)

Toma-se para  $\lambda=0 \Rightarrow \sigma_{fl} = \sigma_E$ , desenha-se então uma curva a mão livre unindo  $\sigma_P$  a  $\sigma_E$  que seja tangente a hipérbole de Euler e que, para  $\lambda=0$ , tenha tangente paralela ao eixo dos  $\lambda$ .

2. Materiais sem limite de escoamento definido (por exemplo o alumínio e a madeira)

Faz-se ensaios para determinar a curva de flambagem onde os resultados obtidos incluem as influências de diversos fatores preponderantes.

3. Expressões analíticas para representar as curvas de flambagem no trecho inelástico:

3.1 Parábolas  $\rightarrow \sigma_{fl} = A + B\lambda^2$

3.2 Equações lineares  $\rightarrow \sigma_{fl} = C + D\lambda$

onde A, B, C e D são constantes do material, obtidos por meio de ensaios em laboratório.

$\Rightarrow$  Podemos ter a curva de flambagem fornecida com ou sem o coeficiente de segurança embutido na sua expressão.

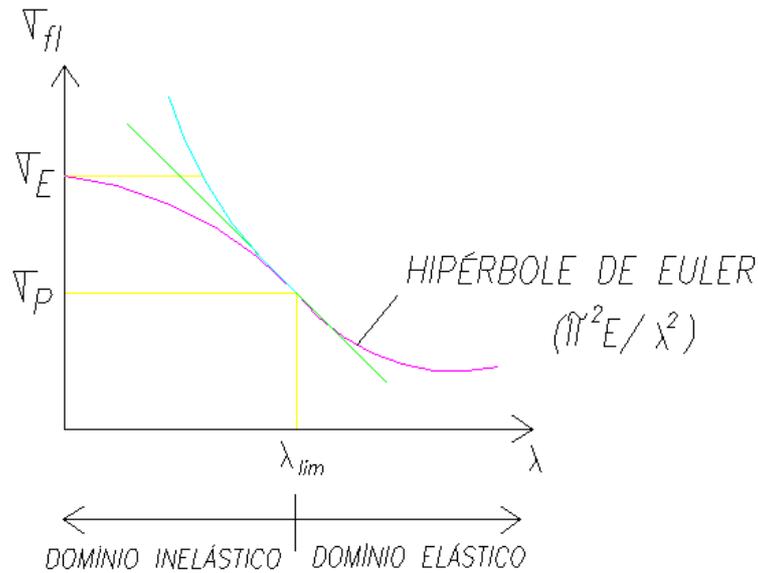


Figura 64 – Teoria do módulo tangente

### Exercício

Um determinado tipo de aço foi ensaiado em um laboratório e obteve os seguintes resultados:

- a – Tensão limite de proporcionalidade,  $\sigma_p$ , igual a 1640 kgf/cm<sup>2</sup>
- b – Tensão de escoamento,  $\sigma_E$ , igual a 2120 kgf/cm<sup>2</sup>.
- c – Módulo de elasticidade longitudinal, E, igual a  $2 \times 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>
- d – Características da curva  $\sigma_{crit} \times \lambda$

- Para  $\lambda \leq 50 \rightarrow \sigma_{crit} = \sigma_E$
- Para  $50 \leq \lambda \leq \lambda_{Lim} \rightarrow \sigma_{crit} = A + \lambda B$
- Para  $\lambda \geq \lambda_{Lim} \rightarrow$  Hipérbole de Euler

- 1) Esboçar o gráfico  $\sigma_{crit} \times \lambda$ , determinando valores de A e B
- 2) A partir do primeiro item, avaliar a carga crítica de uma coluna engastada em sua fundação e livre em seu topo, cujo pé direito apresenta 2,70m e sua seção

transversal tenha forma quadrada com 25cm de aresta. Adotar um coeficiente de segurança igual a 1,3.

- 3) Comparar a carga axial que leva a coluna do item 2 ao escoamento com a carga de flambagem encontrada.

Resolução

1 – Determinação dos coeficientes A e B.

$$120 = A + 50B$$

$$1640 = A + \lambda_{Lim} B \quad \text{onde } \lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{2000000}{1640}} = 109,71$$

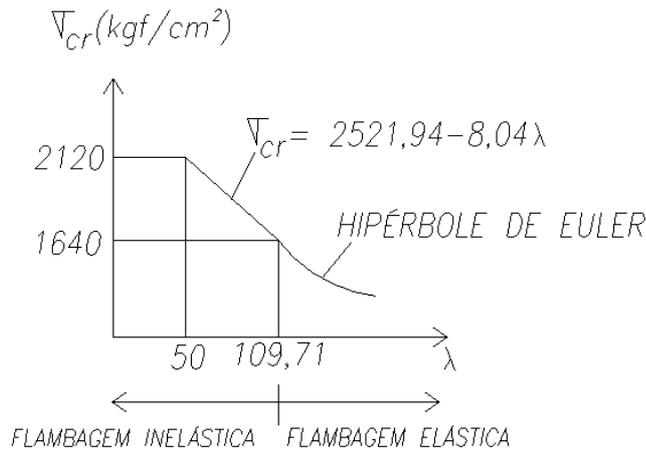
$$1640 = A + 109,71B$$

Resolvendo o sistema matemático, temos:

$$480 = 0 - 59,71B \rightarrow B = -8,04$$

$$A = 2120 + 401,94 \rightarrow A = 2521,94$$

Esboço do gráfico.



$$2 - r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{25 \times 25^3}{12}} = 7,22 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{L_{fl}}{r} = \frac{2 \times 270}{7,22} = 74,79 \text{ (valor maior que 50}$$

e menor que 109,71)

$$\text{Logo: } \sigma_{cr} = 2521,94 - 8,04\lambda = 2521,94 - 8,04 \times 74,79 = 1920,63 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{Carga crítica: } P_{cr} = \frac{1920,63 \times 25 \times 25}{1,3} = 923379,81 = 923 \text{ tf}$$

$$3 - P_{escoamento} = \frac{2120 \times 25 \times 25}{1,3} = 1019230,77 = 1019 \text{ tf}$$

Mesmo atingindo o escoamento a partir de 1019tf a coluna sofre flambagem após 923tf sendo essa a carga limite de aplicação.