Apostila

Mecânica Aplicada

SUMÁRIO

1. LISTA DE SÍMBOLOS

Letras maiúsculas

A - área
E - módulo de elasticidade longitudinal
F - força
I - momento de inércia
L - comprimento
M - momento fletor
Q - momento estático
N - força normal
P - carga concentrada
R - resultante de forças ou esforço resistente
S - esforço solicitante
V - força cortante

Letras gregas

α, θ - ângulo ou coeficiente
δ - deslocamento
$\varnothing$ - diâmetro
ε - deformação específica
γ_f - coeficiente de majoração das ações
σ - tensão normal
$\overline{\sigma}$ - tensão normal admissível
τ - tensão tangencial
$\overline{\tau}$ - tensão tangencial admissível
υ - coeficiente de Poisson

Letras minúsculas

a - aceleração
b - largura
g - aceleração da gravidade
h - dimensão, altura
l - comprimento
m - metro ou massa
máx - máximo
mín - mínimo
q - carga distribuída
s - segundo
v - deslocamento vertical
y - distância da linha neutra ao ponto de maior encurtamento ou alongamento na seção transversal de uma peça fletida

Índices

adm - admissível
c - compressão
f - ação
t - tração, transversal
w - alma das vigas
máx - máximo
mí*n* - mínimo

2. INTRODUÇÃO

2.1 - A Mecânica

A Mecânica é uma ciência física aplicada que trata dos estudos das forças e dos movimentos. A Mecânica descreve e prediz as condições de repouso ou movimento de corpos sob a ação de forças.

A finalidade da Mecânica é explicar e prever fenômenos físicos, fornecendo, assim, os fundamentos para as aplicações da Engenharia.

A Mecânica é subdividida em três grandes ramos: Mecânica dos Corpos Rígidos, Mecânica dos Corpos Deformáveis e Mecânica dos Fluídos, como indicado abaixo.

$$Mecânica\begin{cases} Mecânica\ dos\ corpos\ rígidos \begin{cases} Estática \\ Cinemática \\ Dinâmica \end{cases} \\ Mecânica\ dos\ corpos\ deformáveis \ \{\mathrm{Re}sistência\ dos\ materiais \\ Mecânica\ dos\ fluídos \begin{cases} Fluídos\ incompressíveis \rightarrow líquidos \\ Fluídos\ compressíveis \rightarrow gases \end{cases} \end{cases}$$

Mecânica dos corpos rígidos: é subdividida em Estática, Cinemática e Dinâmica.

A Estática se refere aos corpos em repouso e estuda as forças em equilíbrio, independentemente do movimento por elas produzido. Na Estática, os corpos analisados são considerados rígidos, conseqüentemente, os resultados obtidos independem das propriedades do material.

A Cinemática estuda os movimentos em si e as leis que os regem:

• *movimento uniforme* – móvel percorrendo espaços iguais em tempos iguais para quaisquer trechos de trajetória;

• *movimento uniformemente variado* – a velocidade do móvel varia de valores iguais em tempos iguais. Se houver crescimento da velocidade, o movimento será uniformemente acelerado; se houver decréscimo, o movimento será uniformemente retardado;

• *movimentos de rotação*.

A Dinâmica estuda a relação entre o movimento e a causa que o produz (força).

Mecânica dos corpos deformáveis: as estruturas e as máquinas nunca são absolutamente rígidas, deformando-se sob a ação das cargas a que estão submetidas. Estas deformações são geralmente pequenas e não alteram apreciavelmente as condições de equilíbrio ou de movimento da estrutura considerada.

No entanto, essas deformações terão importância quando houver riscos de ruptura do material. A Mecânica dos corpos deformáveis é estudada pela Resistência dos Materiais, Mecânica dos Materiais ou Mecânica dos Sólidos, como também são conhecidas.

O estudo dos corpos deformáveis resume-se na determinação da resistência mecânica, da rigidez e da estabilidade de elementos estruturais.

Mecânica dos fluídos: A Mecânica dos Fluídos é subdividida no estudo dos fluidos incompressíveis (líquidos) e fluidos compressíveis (gases). Uma importante subdivisão do estudo de fluidos incompressíveis é a hidráulica.

2.2 - Conceitos Fundamentais

Os conceitos fundamentais da Mecânica baseiam-se na Mecânica *Newtonina*:

- <u>espaço</u>: o conceito de espaço é associado à noção de posição de um ponto material, o qual pode ser definido por três comprimentos, medidos a partir de um certo ponto de referência, ou de origem, segundo três direções dadas. Estes comprimentos são conhecidos como as coordenadas do ponto;
- <u>tempo</u>: para se definir um evento não é suficiente definir sua posição no espaço. O tempo ou instante em que o evento ocorre também deve ser dado;
- <u>força</u>: a força representa a ação de um corpo sobre outro; é a causa que tende a produzir movimento ou a modificá-lo. A força é caracterizada pelo seu ponto de aplicação, sua intensidade, direção e sentido; uma força é representada por um vetor.

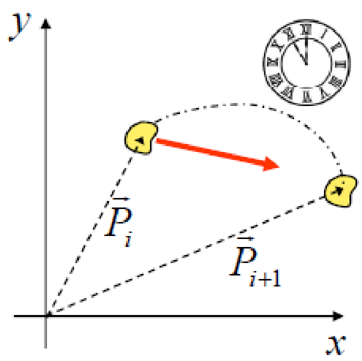


Figura 2.1 – Conceitos fundamentais da mecânica

2.3 - Três leis fundamentais de Newton

- Primeira Lei: “Se a intensidade da força resultante que atua sobre um ponto material é zero, este permanecerá em repouso se estava originalmente em repouso; ou permanecerá com velocidade constante e em linha reta se estava originalmente em movimento” → **Lei da inércia**
- Segunda Lei: “Se a força resultante que atua sobre um ponto material não é zero, este terá uma aceleração proporcional à intensidade da resultante e na direção desta, com o mesmo sentido” → **Lei da fórmula F=ma**
- Terceira Lei: “As forças de ação e reação entre corpos em contato tem a mesma intensidade, mesma linha de ação e sentidos opostos” → **Lei da ação e reação**

2.4 - Sistema Internacional de Unidades

O Sistema Internacional de Unidades (SI) é subdividido em unidades básicas e unidades derivadas.

As unidades básicas são: metro (m), quilograma (kg) e segundo (s). As unidades derivadas são, entre outras, força, trabalho, pressão, etc...

As unidades do SI formam um sistema absoluto de unidades. Isto significa que as três unidades básicas escolhidas são independentes dos locais onde são feitas as medições.

A força é medida em Newton (N) que é definido como a força que imprime a aceleração de 1 m/s² à massa de 1 kg. A partir da Equação $F=m.a$ (segunda Lei de Newton), escreve-se: 1 N = 1 kg × 1 m/s².

As medidas estáticas de forças são efetuadas por meio de instrumentos chamados dinamômetros.

O peso de um corpo também é uma força e é expresso em Newton (N). Da Equação $P=m.g$ (segunda lei de Newton ou lei da Gravitação) segue-se que o peso de um corpo de massa 1 kg é = (1 kg)×(9,81 m/s²) = 9,81 N, onde $g=9{,}81 m/s^2$ é a aceleração da gravidade.

A pressão é medida no SI em Pascal (Pa) que é definido como a pressão exercida por uma força de 1 Newton uniformemente distribuída sobre uma superfície plana de 1 metro quadrado de área, perpendicular à direção da força $Pa = N/m^2$. Pascal é também unidade de tensões normais (compressão ou tração) ou tensões tangenciais (cisalhamento).

Múltiplos e submúltiplos

Tabela 2.1 – Múltiplos e submúltiplos das unidades

Nome	Símbolo	fator pelo qual a unidade é multiplicada
exa	E	10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15} = 1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
quilo	k	10^{3} = 1 000
hecto	h	10^{2} = 100
deca	da	10
deci	d	10^{-1} = 0,1
centi	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
micro	μ	10^{-6} = 0,000 001
nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
pico	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15} = 0,000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18} = 0,000 000 000 000 000 001

Conversão de unidades

Tabela 2.2 – Conversão de unidades

A unidade	é equivalente a
1MPa	1 N/mm^2
1 MPa	1 x 10^6 N/m^2
1 GPa	1 x 10^9 N/m^2
1 m	100 cm
1 cm	0,01 m
1 kgf	9,81 N
1 kgf	2,20 lb
1 polegada (ou 1")	2,54 cm
1 m^2	10000 cm^2

$$Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{N}{cm^2 \times 10^4} = 0{,}0000001 \text{kN/cm}^2 = 10^{-7} \text{ kN/cm}^2$$

$$MPa = \frac{N \times 10^6}{m^2} = \frac{N \times 10^6}{cm^2 \times 10^4} = \frac{kN}{cm^2 \times 10} = 0{,}01 \text{kN/cm}^2$$

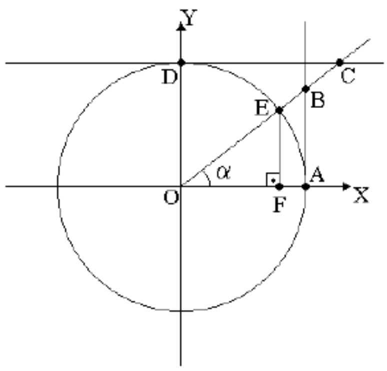
$$GPa = \frac{N \times 10^9}{m^2} = \frac{N \times 10^9}{cm^2 \times 10^4} = \frac{kN \times 10^2}{cm^2} = 100 \text{ kN/cm}^2 = 10^2 \text{ kN/cm}^2$$

2.5 - Trigonometria

Para o estudo da Mecânica necessitam-se dos conceitos fundamentais da trigonometria.

A palavra trigonometria significa medida dos três ângulos de um triângulo e determina um ramo da matemática que estuda as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

Círculo e Funções Trigonométricas



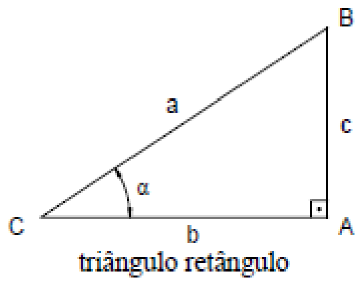
$$sen\,\alpha = \overline{EF}$$
$$\cos\alpha = \overline{OF}$$
$$tg\,\alpha = \overline{AB}$$
$$\cot g\,\alpha = \overline{DC}$$
$$\sec\alpha = \overline{OB}$$
$$\cos ec\,\alpha = \overline{OC}$$
$$\overline{OE} = R = 1$$

Figura 2.2 – Relações trigonométricas

Triângulo retângulo

No triângulo retângulo, os catetos são os lados que formam o ângulo de 90º. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º e é determinada pela relação: $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).

Relações trigonométricas



$$sen\alpha = \frac{cateto\_oposto}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\_adjacente}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\_oposto}{cateto\_adjacente} = \frac{c}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\_adjacente} = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = arctg\frac{c}{b}\,;\ \alpha = arcsen\frac{c}{a}\,;\ \alpha = \arccos\frac{b}{a}$$

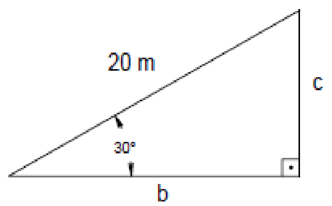
Relação fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Razões trigonométricas especiais

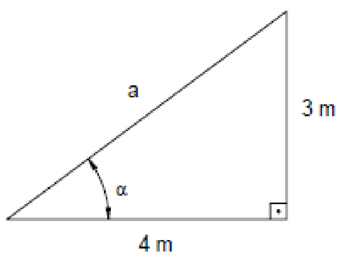
	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios

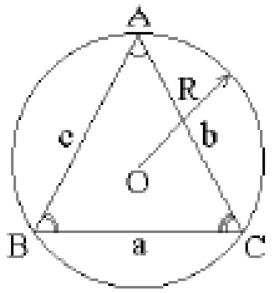
1. Calcule o valor de *c* e o valor de *b* da figura.



2. Determine o valor do ângulo α da figura



Triângulo qualquer



Lei dos senos: $\dfrac{a}{senA} = \dfrac{b}{senB} = \dfrac{c}{senC} = 2R$

Lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos C$

Teorema angular de Tales: $A + B + C = 180^o$

3. ESTÁTICA DOS PONTOS MATERIAIS

A expressão "ponto material" não implica somente em limitar o estudo a pequenos corpúsculos, e sim que o tamanho e a forma dos corpos em estudo não afetam significativamente a solução dos problemas; de modo que todas as forças que atuam em uma dada matéria serão consideradas como atuantes em um único ponto. Em resumo, podemos estudar o efeito de "n" forças extrapolando-as para um único ponto material.

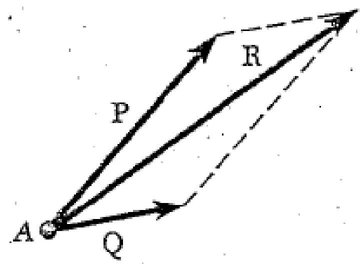


Figura 3.1 – Resultante de forças

3.1 – Forças no plano

A Força representa a ação de um corpo sobre o outro e é caracterizada pelo seu ponto de aplicação, sua intensidade, direção e sentido.

A intensidade de uma força é expressa em Newton (N) no Sistema Internacional de Unidades (SI).

A direção de uma força é definida por sua linha de ação, ou seja, é a reta ao longo da qual a força atua, sendo caracterizada pelo ângulo que forma com algum eixo fixo, como indicado na figura 3.2 abaixo.

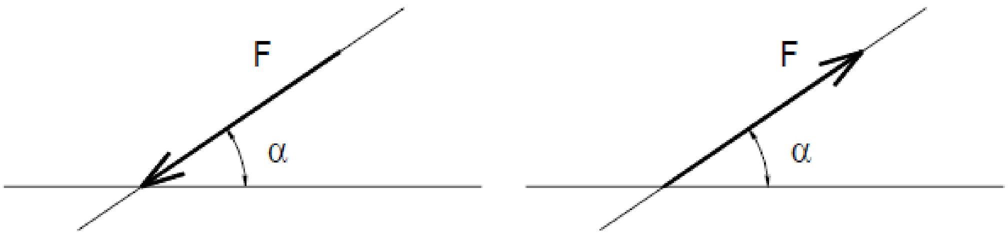


Figura 3.2 – Linha de ação das forças

O sentido da força é indicado por uma seta, chamada de vetores; que são entes matemáticos que possuem intensidade (módulo), direção e sentido, e que se somam de acordo com regras específicas.

Denomina-se Grupo de forças, o conjunto de forças aplicadas em um único ponto de um corpo.

Sistema de forças é o conjunto de forças aplicadas simultaneamente em pontos diversos de um mesmo corpo.

A Resultante (R) de forças é uma grandeza vetorial, definidas por um ponto de aplicação, um módulo, uma direção e um sentido, oriunda da soma de outros vetores.

3.2 - Equilíbrio de um ponto material

Ponto material é uma pequena porção de matéria que pode ser considerada como se ocupasse um ponto no espaço.

Quando a resultante de todas as forças que atuam sobre um ponto material é nula, este ponto está em equilíbrio. Este princípio é conseqüência da primeira lei de Newton.

Para exprimir algebricamente as condições de equilíbrio de um ponto material, escreve-se:

$$\Sigma F = R = 0$$

onde:

F = força

R = resultante das forças

A representação gráfica de todas as forças que atuam em um ponto material pode ser representada por um diagrama de corpo livre, como indica a figura 3.3 abaixo.

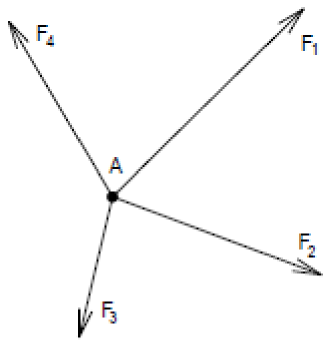
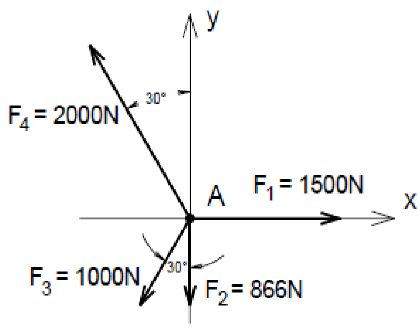


Figura 3.3 – Diagrama de corpo livre

As condições necessárias e suficientes para garantir o equilíbrio são: $\Sigma Fx = 0$ e $\Sigma Fy = 0$ (somatório das forças projetadas nos eixos "x" e "y" são iguais a zero).

Exercícios

1. Avaliar se o sistema de forças indicado abaixo está ou não em equilíbrio.



$$\sum H = 0 \rightarrow 1500 - 2000 sen 30^{o} - 1000 sen 30^{o} = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow 866 - 2000 \cos 30^{o} + 1000 \cos 30^{o} = 0$$

Resposta: O sistema de forças está em equilíbrio, já que o somatório das forças em x e y é zero.

3.3 – Componentes cartesianas e vetores unitários

Diz-se que uma força foi decomposta em duas componentes cartesianas (ou três) se suas componentes **Fx** e **Fy** (ou **Fz**) são mutuamente perpendiculares e tem direções paralelas aos eixos coordenados (figura 3.4). Definindo os vetores unitários **i e j (**ou **k)** orientados segundo os eixos x e y (ou z), respectivamente, escrevemos para o plano xy:

$$\mathbf{Fx} = Fx\mathbf{i};\ \mathbf{Fy} = Fy\mathbf{j} \text{ e } F = Fx\mathbf{i} + Fy\mathbf{j}$$

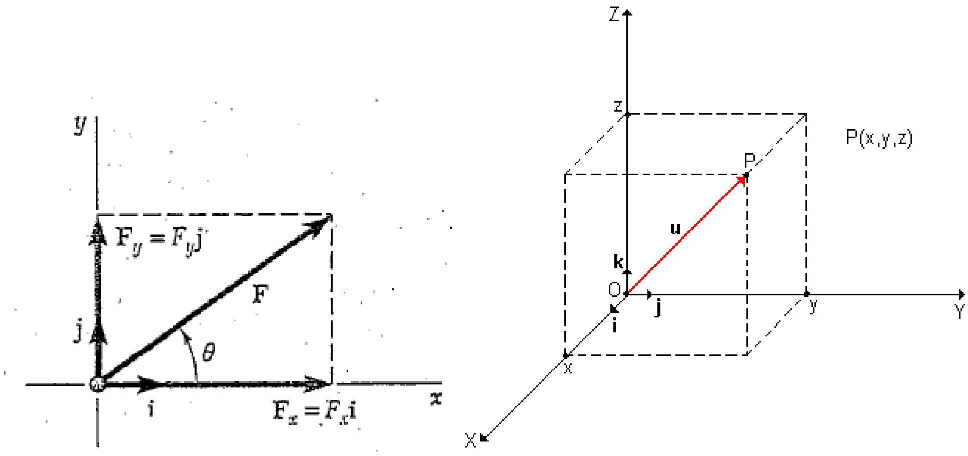


Figura 3.4 – Vetor e suas componentes cartesianas - plano e espaço, respectivamente

onde **Fx** e **Fy** são as componentes escalares de **F**. Estas componentes, que podem ser positivas ou negativas, são definidas pelas relações

$$Fx = F\cos\theta \ \text{ e } \ Fy = F\text{sen}\,\theta$$

Quando as componentes cartesianas *Fx* e *Fy* de uma força **F** são dadas, o ângulo θ entre a força e o eixo x pode ser determinado a partir de

$$\tan\theta = Fy/Fx$$

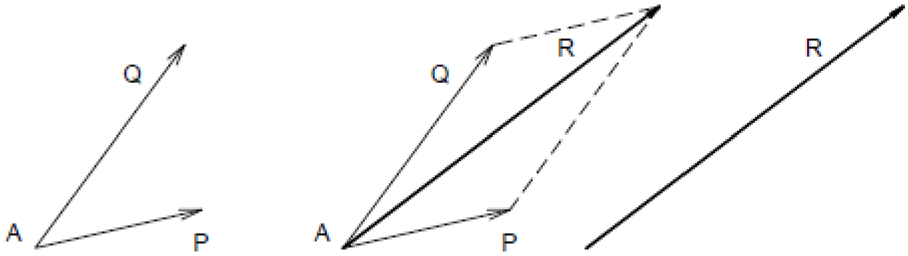
O módulo *F* da força pode ser obtido resolvendo-se as equações anteriores ou através do teorema de Pitágoras.

3.4 – Resultante de uma força

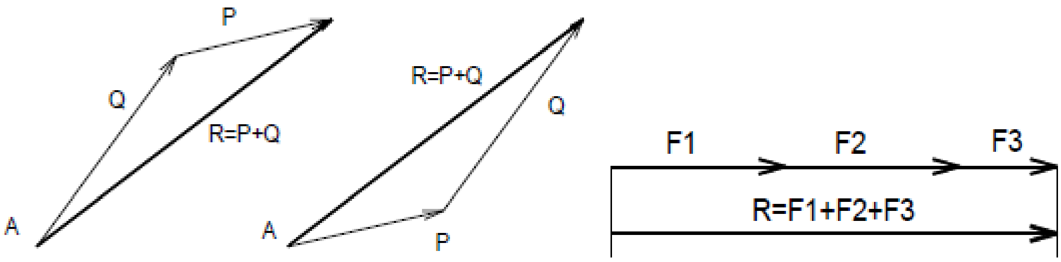
Constata-se experimentalmente que duas forças P e Q que atuam sobre um ponto material podem ser substituídas por uma única força R que tenha o mesmo efeito sobre esse ponto material. Essa força é chamada de resultante de P e Q. Portanto, a resultante de um grupo de forças é a força que, atuando sozinha, produz ação idêntica à produzida pelo grupo ou sistema de forças. A resultante pode ser determinada por soluções gráficas ou analíticas.

a) Soluções gráficas: quando um ponto material está em equilíbrio sob a ação de mais de três forças o problema pode ser resolvido graficamente pelo desenho de um polígono de forças, como indicado nas figuras abaixo.

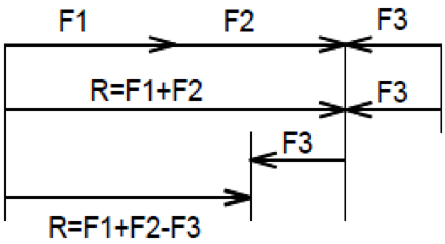
1. Regra do paralelogramo:



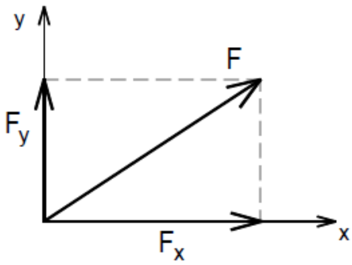
2. Regra do triângulo:



3. Composição de forças:



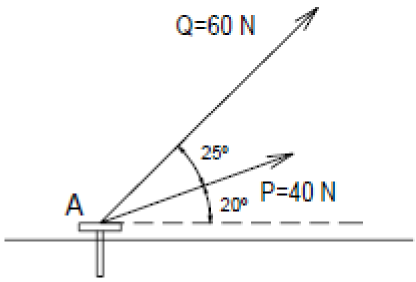
4. Decomposição de forças:



b) Soluções analíticas: os métodos analíticos utilizam a trigonometria (lei dos cossenos, lei dos senos, relação fundamental, etc) e as equações de equilíbrio.

Exercícios

1. Determinar a Resultante das duas forças P e Q, que age sobre o parafuso A.



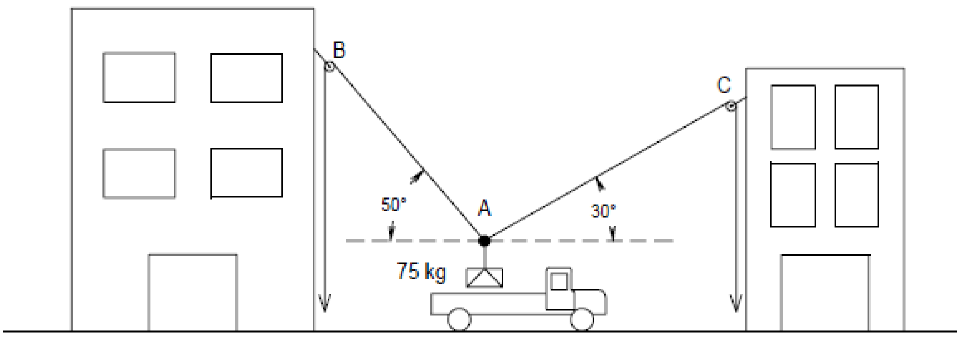
$$R = \sqrt{(60\times\cos 45^{o}+40\cos 20^{o})^{2}+(60\times sen45^{o}+40sen20^{o})^{2}} = 97{,}72N$$

$$arctg\theta = \frac{(60\times sen45^{o}+40sen20^{o})}{(60\times\cos 45^{o}+40\cos 20^{o})} = 0{,}701 \rightarrow \theta = 35^{o}$$

2. Sabendo-se que o parafuso está fixo, portanto em equilíbrio, existem forças de reação que equilibram as forças Q e P (3ª lei de Newton). Determine as forças de reação Fx e Fy.

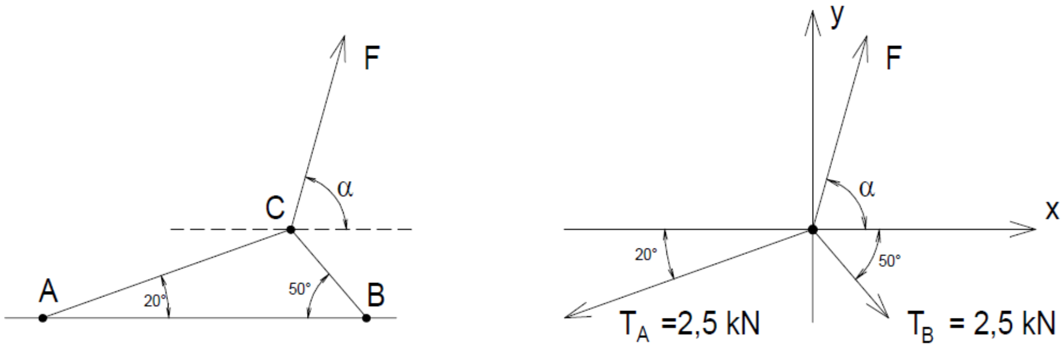
Respostas: Fx= 80N e Fy= 56N

3. Determine as forças atuantes nos cabos que sustentam um objeto de 75kg como mostrado abaixo.



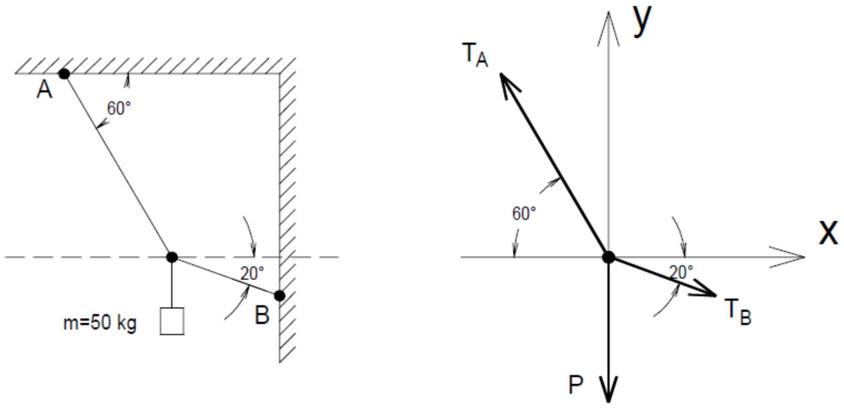
Respostas: $TAB = 647$ N e $TAC = 480$ N

4. Determinar a força F e o ângulo α.



Respostas: F=2,85 kN e α = 74,7º

5. Determinar a força nos cabos



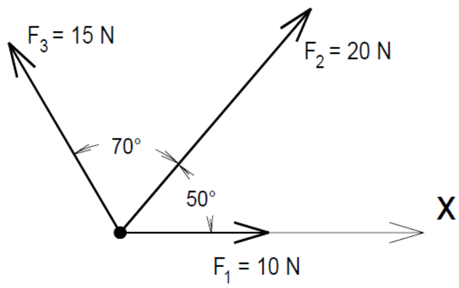
$$\sum V = 0 \rightarrow \ sen60^o T_A = sen20^o T_B + (50 \times 9{,}81) \Rightarrow 0{,}866 T_A = 0{,}342 T_B + 490{,}5$$

$$0{,}866 \times 1{,}879 T_B - 0{,}342 T_B = 490{,}5 \Rightarrow T_B = 381{,}54 N$$

$$\sum H = 0 \rightarrow \ \cos 60^o T_A = \cos 20^o T_B \Rightarrow 0{,}5 T_A = 0{,}940 T_B \Rightarrow T_A = 1{,}879 T_B$$

$$T_A = 1{,}879 \times 381{,}54 \Rightarrow T_A = 716{,}92 N$$

6. Determinar a resultante do sistema de forças indicado e o seu ângulo de inclinação em relação ao eixo x.

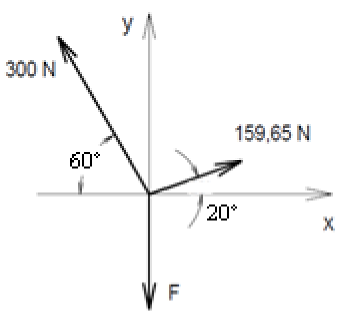


$$\sum V = 0 \rightarrow \ 20 sen50^o + 15 sen60^o = 15{,}32 + 12{,}99 = 28{,}31 N$$

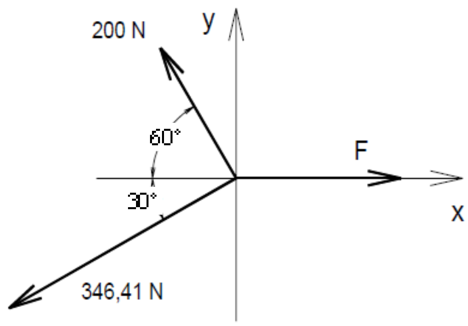
$$\sum H = 0 \rightarrow \ 20 \cos 50^o + 10 - 15 \cos 60^o = 12{,}86 + 10 - 7{,}5 = 15{,}36 N$$

$$R = \sqrt{28{,}31^2 + 15{,}36^2} = 32{,}21 N \rightarrow arctg\theta = \frac{28{,}31}{15{,}36} = 1{,}843 \rightarrow \theta = 61{,}52^o$$

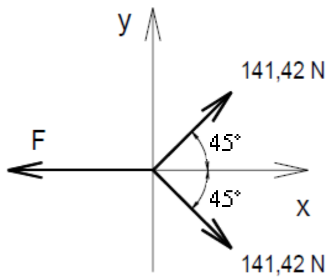
Determinar o valor da força F.



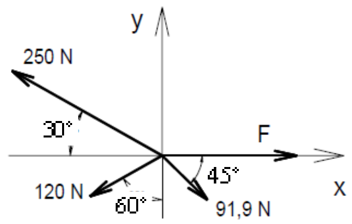
a) Resposta: F = 314,41 N



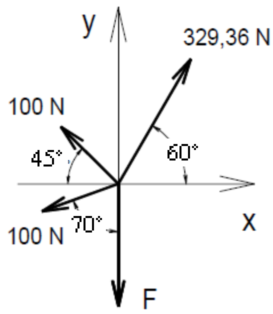
b) Resposta: F = 400 N



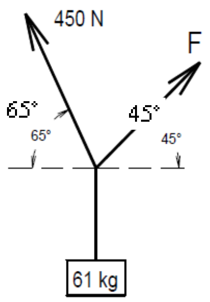
c) Resposta: F = 200 N



d) Resposta: F = 255,45 N



e) Resposta: F = 321,74 N



f) Resposta: F=268,95 N

3.5 – Força e equilíbrio no espaço

Uma força no espaço tridimensional pode ser decomposta em componentes cartesianas **Fx**, **Fy** e **Fz**. Representando por θx, θy e θz, respectivamente, os ângulos que **F** forma com os eixos x, y e z, temos:

$Fx = F \cos \theta x$; $Fy = F \cos \theta y$ e $Fz = F \cos \theta z$ (vide figura 3.5)

Os co-senos diretores de θx, θy e θz são conhecidos como co-senos diretores da força F. Definindo os vetores unitários **i**, **j** e **k** segundo os eixos coordenados, escrevemos:

$$\mathbf{F} = Fx\,\mathbf{i} + Fy\,\mathbf{j} + Fz\,\mathbf{k}$$

ou

$$\mathbf{F} = F\,(\cos\theta x\,\mathbf{i} + \cos\theta y\,\mathbf{j} + \cos\theta z\,\mathbf{k})$$

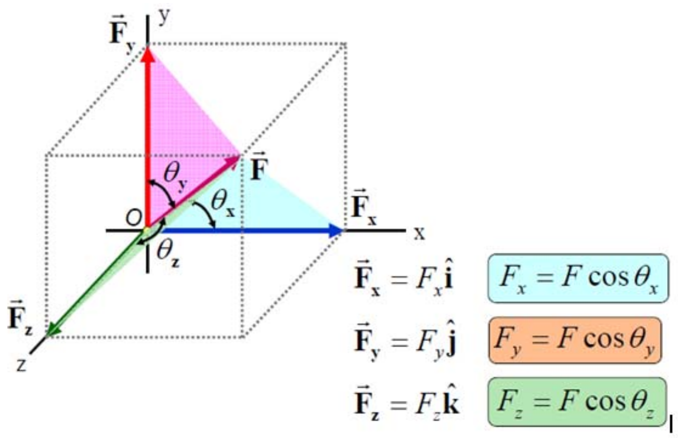


Figura 3.5 – Força **F** no espaço tridimensional

que mostra que **F** é o produto do seu módulo *F* pelo vetor unitário:

$$\lambda = \cos\theta x\,\mathbf{i} + \cos\theta y\,\mathbf{j} + \cos\theta z\,\mathbf{k}$$

Como o módulo de λ é igual a 1, deve-se ter:

$$\cos^2\theta x + \cos^2\theta y + \cos^2\theta z = 1$$

Quando as componentes cartesianas *Fx*, *Fy* e *Fz* de uma força **F** são dadas, o módulo *F* da força é determinado pela equação:

$$F = \sqrt{F^2x + F^2y + F^2z}$$

E os co-senos diretores de **F** pelas equações:

$$\cos\theta x = \frac{Fx}{F};\ \cos\theta y = \frac{Fy}{F}\ \text{ e }\ \cos\theta z = \frac{Fz}{F}$$

Quando uma força é definida no espaço tridimensional pelo seu módulo F e por dois pontos M e N de sua linha de ação, suas componentes cartesianas podem ser obtidas da seguinte maneira:

- define-se o vetor **MN** que une os pontos M e N e depois se determina o vetor unitário λ (vetor **MN** dividido por seu módulo MN $\rightarrow$ $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{MN}}{MN}$).

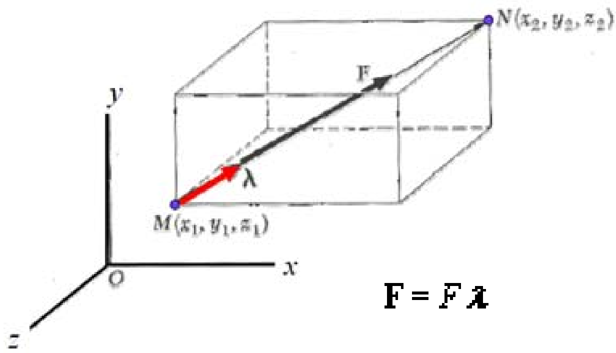


Figura 3.6 – Força **F** definida por dois pontos e pelo vetor unitário

Com relação ao equilíbrio dizemos que: quando um ponto material está em equilíbrio no espaço tridimensional utilizam-se as três equações de equilíbrio

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

para calcular até três incógnitas.

3.6 – Diagrama de corpo livre

Para resolver um problema de um ponto material em equilíbrio, começa-se desenhando um referencial onde estejam representadas todas as forças que agem sobre ele.

4. CORPOS RÍGIDOS: SISTEMA EQUIVALENTE DE FORÇAS

A equivalência estática é uma relação entre sistemas de forças aplicadas sobre um corpo. Dados dois sistemas de forças se diz que são estaticamente equivalentes, se e somente se, a força resultante e o momento resultante de ambos sistemas de forças são idênticos.

4.1 – Forças Externas x Forças Internas

As forças externas representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido considerado, sendo inteiramente responsáveis pelo seu comportamento externo.

Causarão o movimento ou assegurarão a permanência em repouso.

Por outro lado, as forças internas são as que mantêm unidos os pontos ou partes materiais que formam o corpo rígido.

4.2 – Princípio da transmissibilidade

O efeito de uma força não é alterado quando esta é aplicada em diferentes pontos do corpo, desde que esta esteja ao longo de sua linha de aplicação.

Nos três casos da figura 4.1 o efeito da força é exatamente o mesmo.

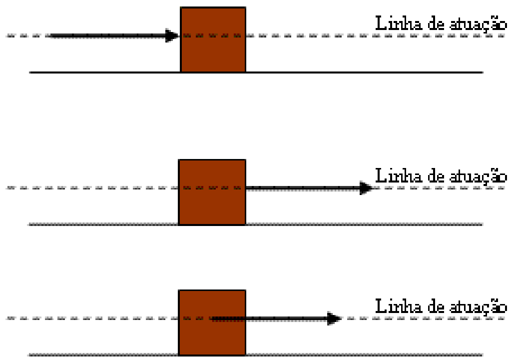
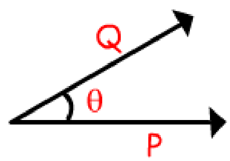


Figura 4.1 – Princípio da transmissibilidade

4.3 – Produto escalar e produto vetorial

O produto escalar é uma função binária definida entre dois vetores que fornece um número real (também chamado "escalar") como resultado. Já o produto vetorial é uma operação binária sobre vetores em um espaço vetorial. Seu resultado difere do produto escalar por ser também um vetor, ao invés de um escalar. Seu principal uso baseia-se no fato que o resultado de um produto vetorial é sempre perpendicular a ambos os vetores originais.

O produto escalar de dois vetores **P** e **Q** é definido como sendo o produto dos módulos de **P** e **Q** pelo cosseno do ângulo formado por eles → $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ\cos\theta$



1. O produto escalar em termos de suas componentes retangulares é: **P** . **Q** = (Px**i** + Py**j** + Pz**k**) . (Qx**i** + Qy**j** + Qz**k**)

2. Da definição de produto escalar temos que os produtos escalares dos vetores unitários são zero ou um:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$$

Assim: **P** . **Q** = Px Qx + PyQy + PzQz

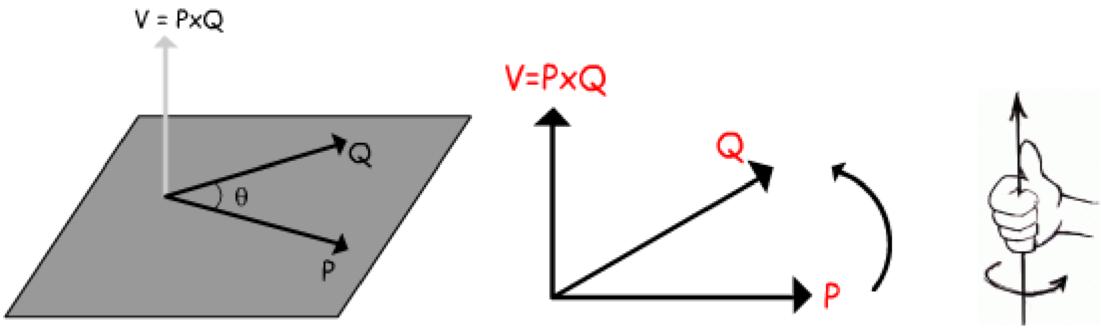
3. O produto escalar de vetores tem propriedades comutativa (**A . B** = **B . A**) e distributiva (**A . (B** + **C**) = **A . B** + **A . C**)

O produto vetorial de dois vetores **P** e **Q** é definido como sendo o vetor **V** que satisfaça às seguintes condições:

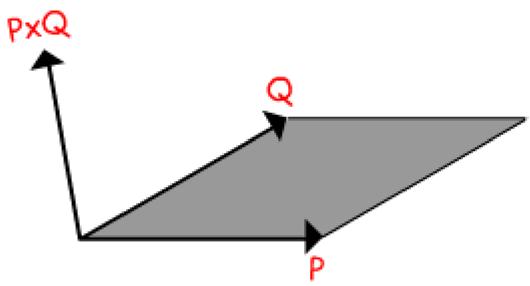
1. A linha de ação de **V** é perpendicular ao plano que contém **P** e **Q**

2. O módulo (ou intensidade) de **V** é o produto dos modulos de **P** e **Q** e do seno do ângulo θ formado por **P** e **Q** → $V=PQ\text{sen}\theta$

3. O sentido de V é definido pela regra da mão direita

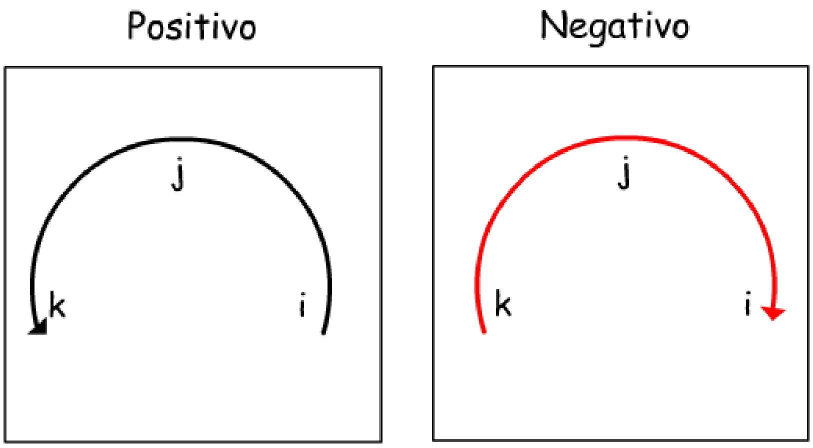


4. O módulo de um produto vetorial será igual à área do paralelogramo construído sobre os vetores originais



5. Os produtos vetoriais dos diversos pares possíveis de vetores unitários **i**, **j** e **k** são:

i x i = 0	**j x i** = **-k**	**k x i** = **j**
i x j = **k**	**j x j** = 0	**k x j** = **-i**
i x k = **-j**	**j x k** = **i**	**k x k** = 0



6. O produto vetorial dos vetores $P = x_1i + y_1j + z_1k$ e $Q = x_2i + y_2j + z_2k$ é igual a:

$$PxQ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad P \text{ x } Q = (y_1z_2 - z_1y_2)i + (z_1x_2 - z_2x_1)j + (x_1y_2 - y_1x_2)k$$

$\Rightarrow$ determinante da matriz 3x3

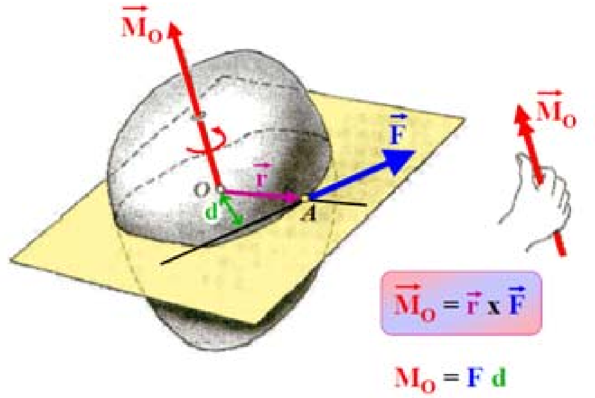
7. O produto vetorial é anticomutativo (**A x B** = - **B x A**) e é distributivo sobre a adição (**A x** (**B** + **C**) = **A x B** + **A x C**).

4.4 – Momento de uma força

Define-se *Momento* como a tendência de uma força F fazer girar um corpo rígido em torno de um eixo fixo. O *Momento* depende do módulo de F e da distância de F em relação ao eixo fixo.

O momento de uma força **F** em relação a um ponto 0 é definido pelo produto vetorial **Mo** = **r** x **F**; onde **r** é o vetor posição que liga a origem 0 ao ponto de aplicação "A" da força **F** (vide figura 4.2), representada por um vetor que define seu módulo, direção e sentido.

Sendo θ o ângulo entre **r** e **F**, determinamos o módulo do momento Mo igual à $rF\text{sen}\theta = Fd$, onde d é a distância perpendicular de 0 à linha de ação de **F**.



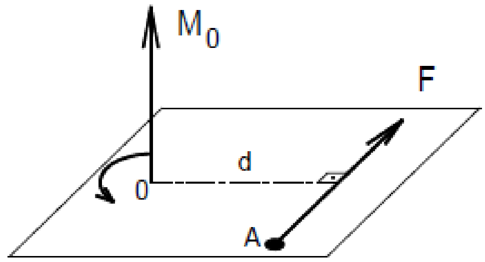


Figura 4.2 – Momento de uma força **F**

Em resumo define-se o momento escalar do vetor **F** em relação a 0, como sendo

$$M = F \times d$$

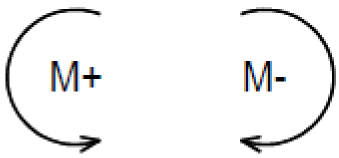
onde: M_0= momento escalar do vetor **F** em relação ao ponto 0;

0 = pólo ou centro de momento;

d= distância perpendicular de 0 à linha de ação de F, também chamada de braço de alavanca.

O momento Mo é sempre perpendicular ao plano que contém o ponto 0. O sentido de Mo é definido pelo sentido de rotação imposto pelo vetor F.

Convenciona-se momento positivo se a força F tender a girar o corpo no sentido anti-horário e negativo, se tender a girar o corpo no sentido horário.



As componentes cartesianas ou retangulares de um momento de uma determinada força são:

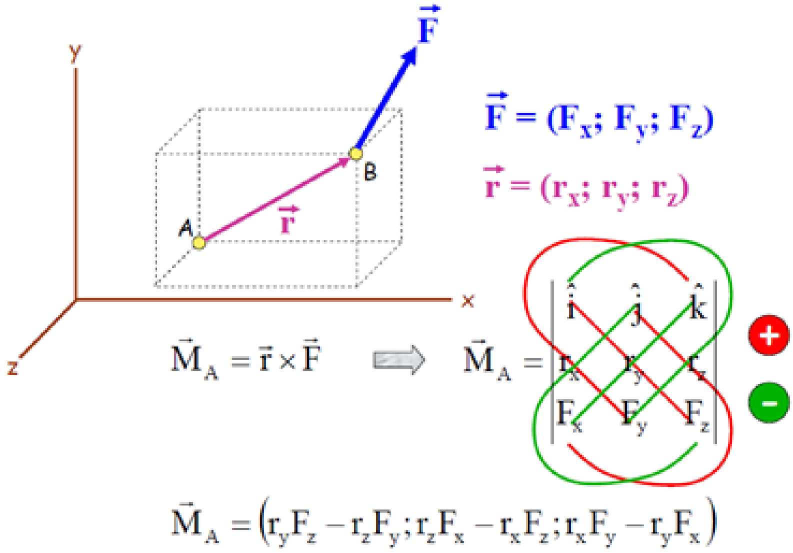
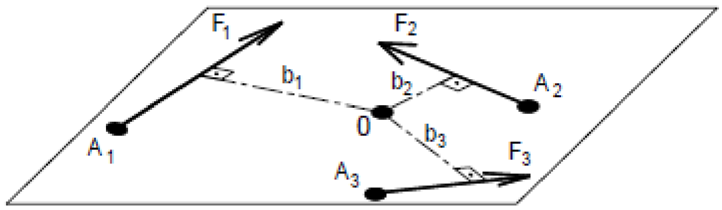


Figura 4.3 – Definição do vetor $\mathbf{M_A}$

No SI, onde a força é expressa em newtons (N) e a distância em metros (m). Portanto, o momento é expresso em newtons × metros (N × m).

4.5 – Momento de um sistema de forças coplanares

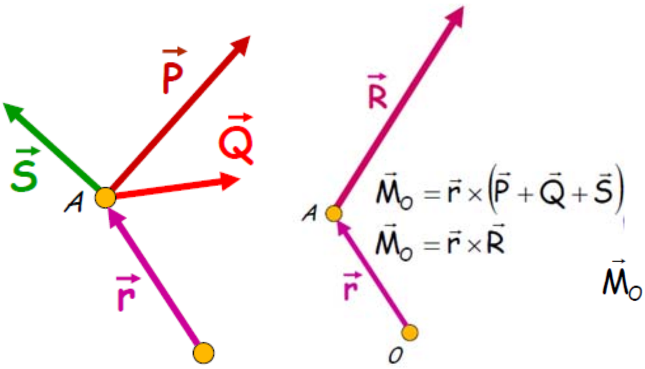
Chama-se Momento de um sistema de forças coplanares $S=\{(F_1,A_1),....,(F_n,A_n)\}$ em relação ao ponto 0, à soma algébrica dos Momentos de cada força em relação ao mesmo ponto 0.



$$M_{S,0} = \sum_{i=1}^{n} M_{F_i,0}$$

4.6 – Teorema de Varignon

O momento gerado por um sistema de forças concorrentes pode ser calculado somando-se os momentos de cada força ou avaliando-se o momento da força resultante equivalente.



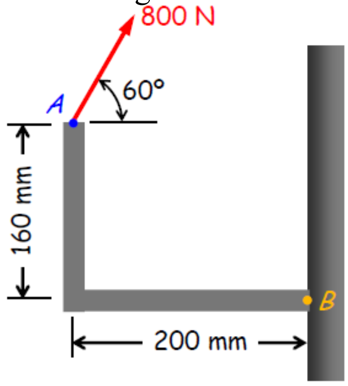
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{S})$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{Q} + \vec{r} \times \vec{S}$$

Exercícios

Uma força de 800 N atua sobre um suporte, conforme mostra a ilustração abaixo. Utilizando o teorema de Varignon determine o momento da força em relação ao ponto B.



692,82N

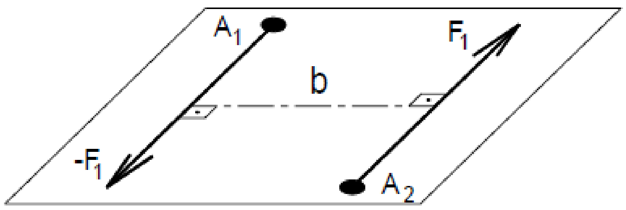
400N

800sen60º x 200 + 800cos60º x 160 =

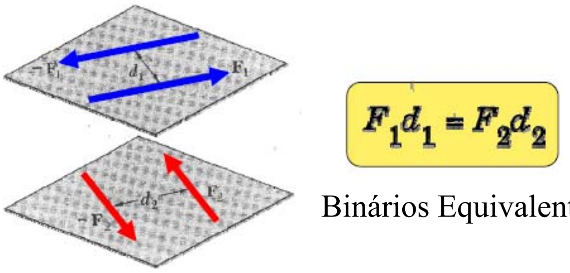
= 202564 Nxmm

4.7 – Momento de um binário

Duas forças F e –F que tenham o mesmo módulo, linhas de ação paralelas e sentidos opostos formam um binário. A soma das componentes das duas forças em qualquer direção é zero. Entretanto, a soma dos momentos das duas forças em relação a um dado ponto não é zero. Apesar de as duas forças não transladarem, o corpo no qual atuam, tendem a fazê-lo girar.



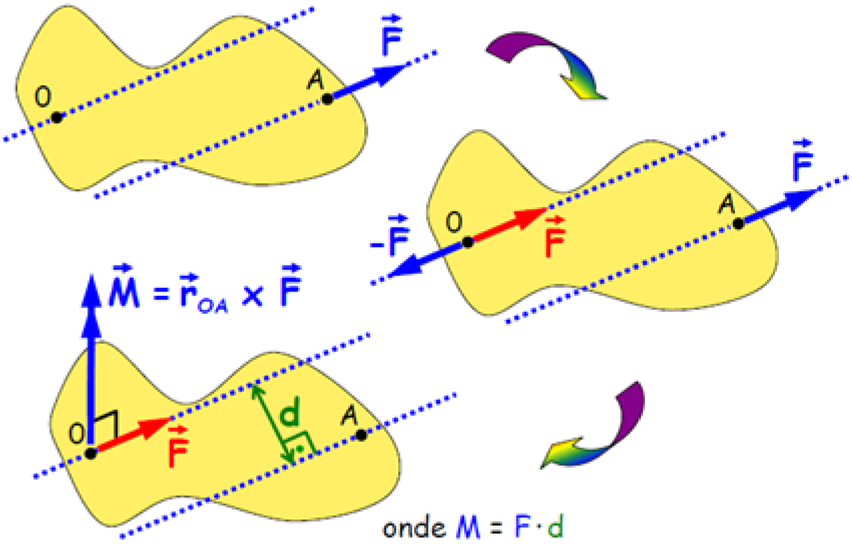
Dois binários que tem o mesmo momento são equivalentes, isto é, eles têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido (ver figura 4.4). Além disso Binários são representados por vetores e por sua vez podem ser combinados empregando-se a lei do paralelogramo.



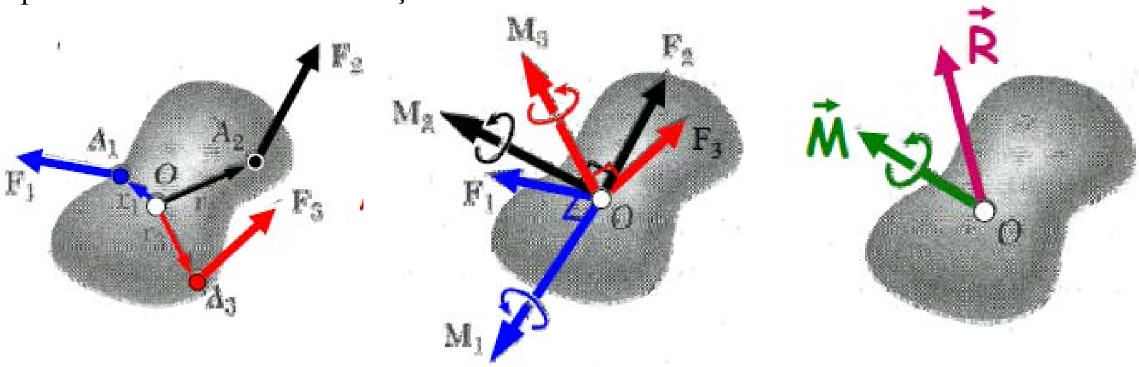
Binários Equivalentes

Figura 4.4

Qualquer força **F** aplicada em um ponto de um corpo rígido pode ser substituída por um sistema força-binário aplicado em outro ponto arbitrário, e constituído da força **F** aplicada nesse ponto e de um binário de momento **M** igual ao momento em relação ao ponto da força **F** na sua posição original.



A "estratégia" acima pode ser aplicada com cada uma das forças do sistema original, tendo como referência o mesmo ponto. Após isso, combinam-se as forças e os vetores momentos originários dos binários, chegando-se ao sistema resultante equivalente com uma única força e um único vetor momento.



Exercícios

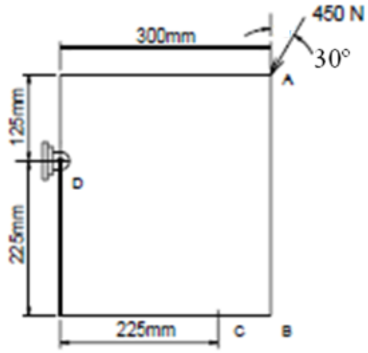
1. Uma força de 450 N é aplicada no ponto A como ilustrado na figura. Determinar:

a) o momento da força em relação a D;

b) a menor força aplicada em B que ocasiona o mesmo momento em relação a D;

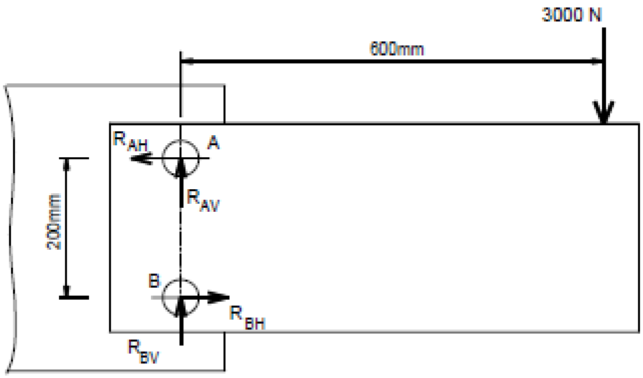
c) o módulo e o sentido da força vertical que, aplicada em C, produz o mesmo momento em relação a D;

d) a menor força que, aplicada em C, ocasiona o mesmo momento em relação a D.



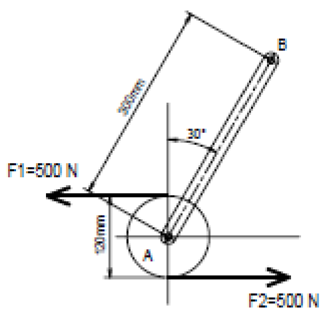
Respostas: M= 88,8 N.m; F= 236,8 N; F= 394,7 N; F= 279 N

2. A figura abaixo representa uma junta rebitada, composta por dois rebites de mesmo diâmetro. Determinar as forças horizontais e verticais atuantes nos rebites.



Respostas: R_{AV}= R_{BV}= 1500 N; R_{AH}= R_{BH}= 9000 N

3. Determinar o Momento em A devido ao binário de forças ilustrado na figura abaixo.



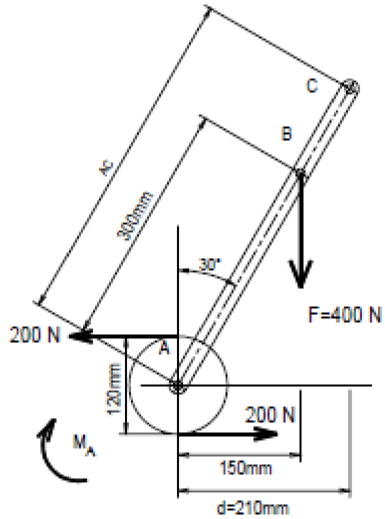
Resposta: M_A= 60 N.m

4. Substituir o binário do exercício anterior por uma força F vertical aplicada no ponto B.

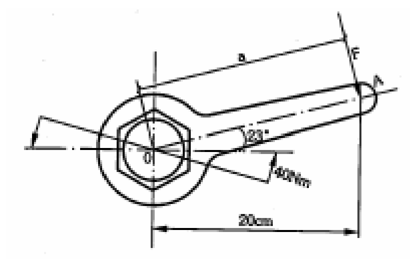
Resposta: F=400N

5. Substituir o binário e a força F ilustrados na figura por uma única força F=400 N, aplicada no ponto C da alavanca. Determinar a distância do eixo ao ponto de aplicação desta força.

Resposta: AC= 420mm

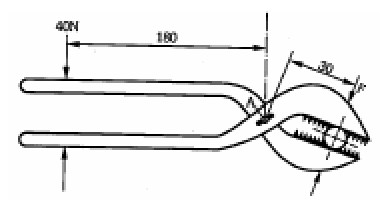


6. Determinar a intensidade da força F para que atue no parafuso o momento (torque) de 40 N.m.



Resposta: F= 184,1 N

7. Um grifo é utilizado para rosquear um tubo de ∅ 20 mm a uma luva, como mostra a figura. Determinar a intensidade da força F exercida pelo grifo no tubo, quando a força aplicada no aperto for 40 N.



Resposta: F=240 N

5. EQUILÍBRIO DOS CORPOS RÍGIDOS

O estudo do equilíbrio de corpos rígidos é a situação em que as forças externas que atuam sobre um determinado corpo formam um sistema equivalente a zero; ou seja, o sistema força-binário equivalente de todas as ações atuantes neste corpo, em relação a qualquer ponto de referência, é nulo, e conseqüentemente o corpo está em equilíbrio.

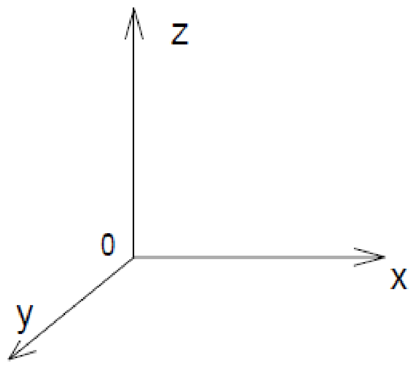
Para um corpo em equilíbrio, o sistema de forças não causa qualquer movimento translacional ou rotacional ao corpo considerado (Força nula e binário nulo).

$$\Sigma F = 0 \text{ e } \Sigma M_0 = 0$$

5.1 – Equações de equilíbrio

As expressões $\Sigma F = 0$ e $\Sigma M_0 = 0$ definem as equações fundamentais da estática.

Decompondo cada força e cada momento em suas componentes cartesianas, encontram-se as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido no espaço, através de seis equações escalares:



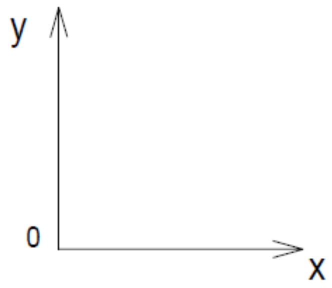
$$\boxed{\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array}}$$

Estas equações podem ser utilizadas para determinar forças desconhecidas (variáveis) aplicadas ao corpo rígido ou reações desconhecidas exercidas por vínculos ou restrições.

Para os problemas que envolvem o equilíbrio de um corpo rígido, escolhe-se uma porção significativa e traça-se um diagrama separado, denominado de diagrama de corpo livre (como visto na seção 3.6), mostrando todas as forças que atuam sobre essa porção, bem como suas cotas (necessárias no cálculo dos momentos das forças).

5.2 – Equilíbrio de estruturas em duas dimensões

As condições de equilíbrio de um corpo rígido simplificam-se consideravelmente no caso de uma estrutura bidimensional. Escolhendo os eixos x e y no plano da estrutura, tem-se:



$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_0$

para cada uma das forças aplicadas ao corpo rígido, então as seis equações de equilíbrio no espaço reduzem-se a:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

onde *A* é um ponto qualquer no plano da estrutura. Estas três equações podem ser resolvidas para um máximo de três incógnitas.

O equilíbrio em duas dimensões é também conhecido como equilíbrio no plano.

5.3 – Equilíbrio de um corpo tridimensional

Consideramos o equilíbrio de um corpo no espaço tridimensional quando cada uma das reações exercidas sobre o corpo, pelos vínculos, pode envolver de uma a seis incógnitas, dependendo do tipo de vínculo ou restrição.

No caso geral do equilíbrio de um corpo tridimensional as seis equações escalares de equilíbrio devem ser usadas para determinar seis incógnitas.

Observamos que até três componentes de reações incógnitas podem ser eliminadas calculando-se ΣM_0, através da escolha conveniente do ponto 0. Ainda as reações em dois pontos podem ser eliminadas da solução de alguns problemas escrevendo-se a equação $\Sigma M_{eixo} = 0$, a qual envolve o cálculo dos momentos das forças em relação a um determinado eixo que passa por dois pontos quaisquer.

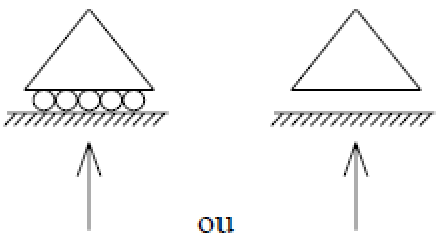
Se as reações envolvem mais de seis incógnitas, algumas delas são estaticamente indeterminadas; se houver menos de seis incógnitas o corpo rígido estará parcialmente vinculado. Mesmo com seis ou mais incógnitas o corpo rígido estará impropriamente vinculado se os vínculos são tais que as reações são paralelas ou então interceptam a mesma reta.

5.4 – Reações de apoio

Para o estudo do equilíbrio dos corpos rígidos não basta conhecer somente as forças externas que agem sobre ele, mas também é necessário conhecer como este corpo rígido está apoiado.

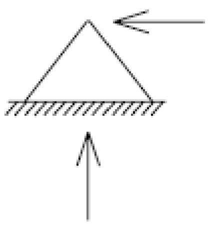
Apoios ou vínculos são elementos que restringem os movimentos das estruturas e recebem a seguinte classificação:

Apoio móvel



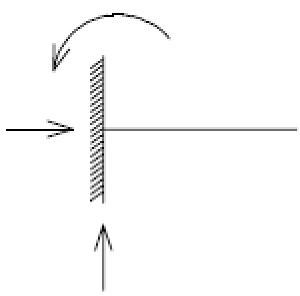
- Impede movimento na direção normal (perpendicular) ao plano do apoio;
- Permite movimento na direção paralela ao plano do apoio;
- Permite rotação.

Apoio fixo



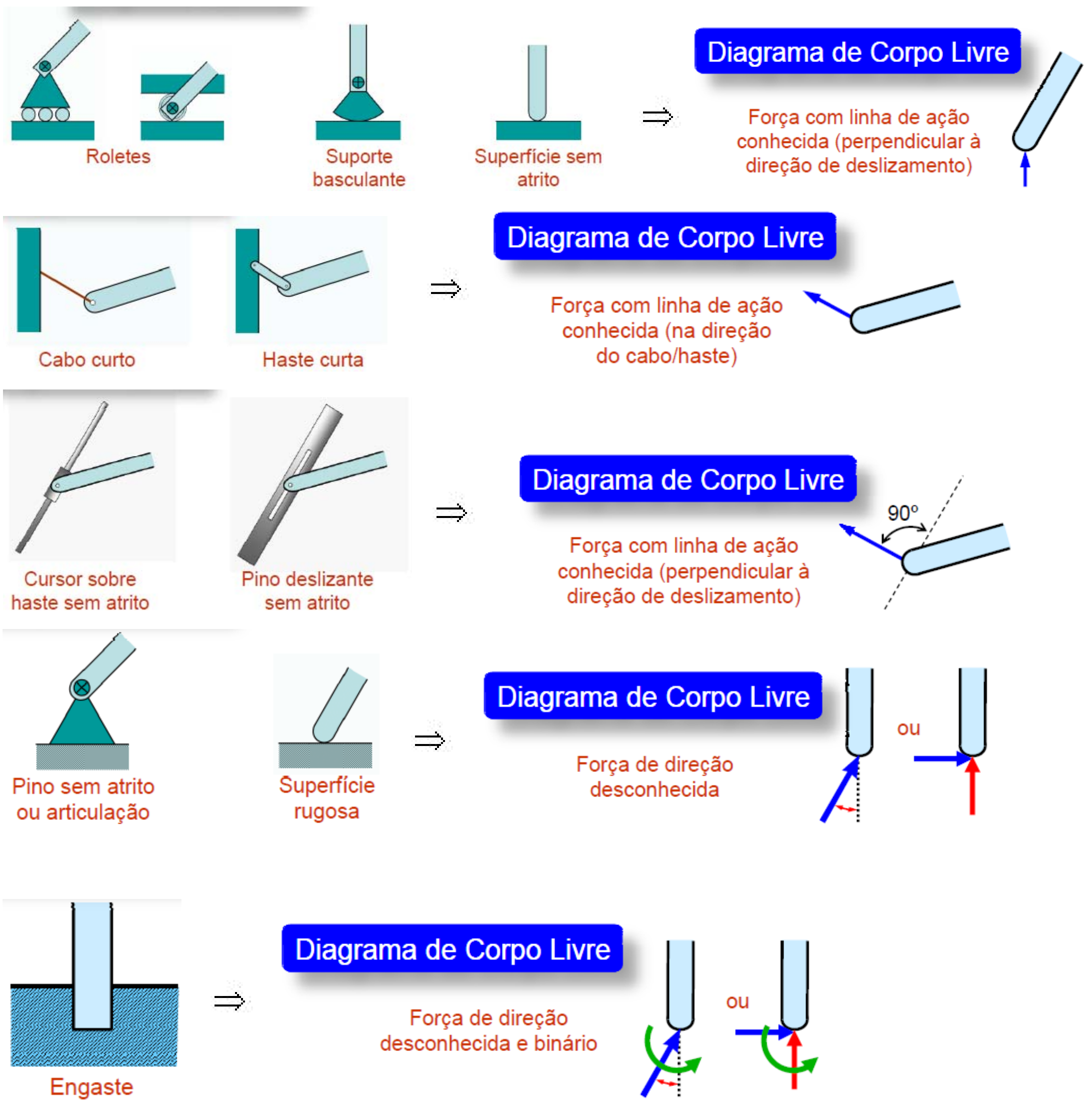
- Impede movimento na direção normal ao plano do apoio;
- Impede movimento na direção paralela ao plano do apoio;
- Permite rotação.

Engastamento



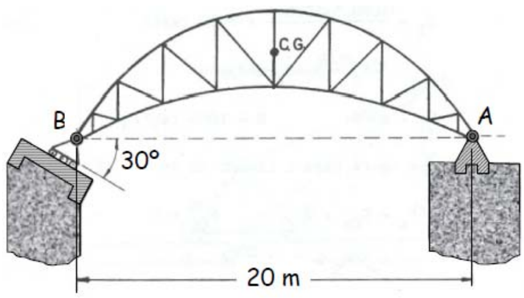
- Impede movimento na direção normal ao plano do apoio;
- Impede movimento na direção paralela ao plano do apoio;
- Impede rotação.

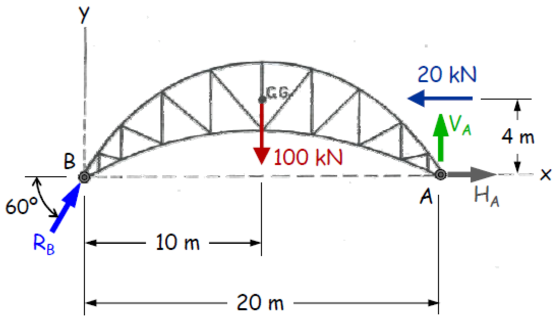
Vínculos Reais



Exercício

1) Uma estrutura em arco treliçado é fixa ao suporte articulado no ponto A, e sobre roletes em B num plano de 30º com a horizontal. O vão AB mede 20 m. O peso próprio da estrutura é de 100 kN. A força resultante dos ventos é de 20 kN, e situa-se a 4 m acima de A, horizontalmente, da direita para a esquerda. Determine as reações nos suportes A e B.





Resolução

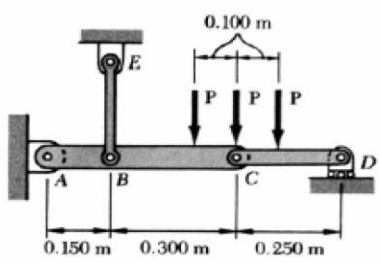
Equilíbrio no ponto B

$$\sum M = 0 \rightarrow 100 \times 10 - V_A \times 20 - 20 \times 4 = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1000 - 80}{20} = 46kN$$

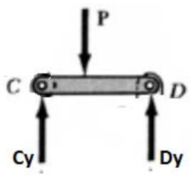
$$\sum V = 0 \rightarrow R_B sen60° - 100 + V_A = 0 \Rightarrow R_B = \frac{-46 + 100}{0{,}866} = 62{,}4kN$$

$$\sum H = 0 \rightarrow R_B \cos 60° + H_A - 20 = 0 \Rightarrow H_A = -62{,}4 \times 0{,}5 + 20 = -11{,}2kN$$

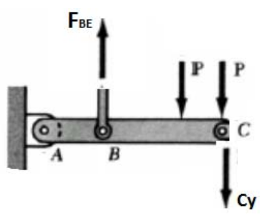
2) Três forças de mesma intensidade, P = 4 kN, estão aplicadas ao mecanismo abaixo. Determinar a força na barra BE.



Resolução



$$\sum M_D = 0 \rightarrow C_y \times 0{,}25 - 4 \times 0{,}15 = 0 \Rightarrow C_y = 2{,}4kN$$



$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_{BE} \times 0{,}15 - 4 \times 0{,}35 - 4 \times 0{,}45 - 2{,}4 \times 0{,}45 = 0 \Rightarrow F_{BE} = 28{,}53kN$$

5.4 – Tipos de Estruturas

As estruturas são classificadas em função do número de reações de apoio ou vínculos que possuem. Cada reação constitui uma incógnita a ser determinada.

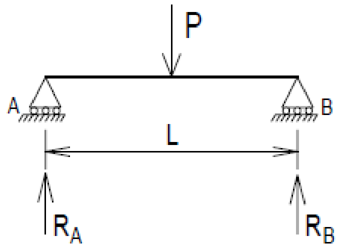
Para as estruturas planas, a Estática fornece três equações fundamentais:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0$$

5.4.1 - Estruturas hipostáticas

Estruturas hipostáticas são aquelas cujo número de reações de apoio ou vínculos é inferior ao número de equações fornecidas pelas condições de equilíbrio da Estática.

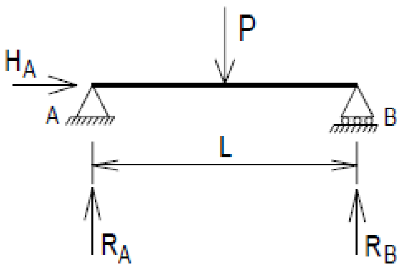
A figura ao lado ilustra um tipo de estrutura hipostática. As incógnitas são duas: R_A e R_B. Esta estrutura não possui restrição a movimentos



5.4.2 - Estruturas isostáticas

Estruturas isostáticas são aquelas cujo número de reações de apoio ou vínculos é igual ao número de equações fornecidas pelas condições de equilíbrio da Estática.

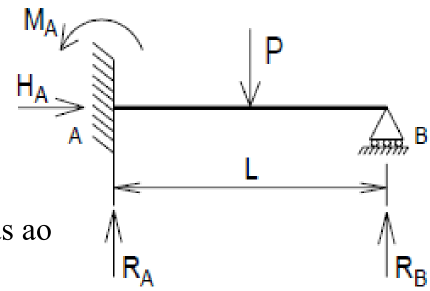
No exemplo da estrutura da figura, as incógnitas são três: R_A, R_B e H_A. Esta estrutura está fixa; suas incógnitas podem ser resolvidas somente pelas equações fundamentais da Estática.



5.4.3 - Estruturas hiperestáticas

Estruturas hiperestáticas são aquelas cujo número de reações de apoio ou vínculos é superior ao número de equações fornecidas pelas condições de equilíbrio da Estática.

Um tipo de estrutura hiperestática está ilustrado na figura ao lado. As incógnitas são quatro: R_A, R_B, H_A e M_A. As equações fundamentais da Estática, não são suficientes para resolver as equações de equilíbrio. São necessárias outras condições relativas ao comportamento da estrutura, como, por exemplo, a sua deformabilidade para determinar todas as incógnitas.

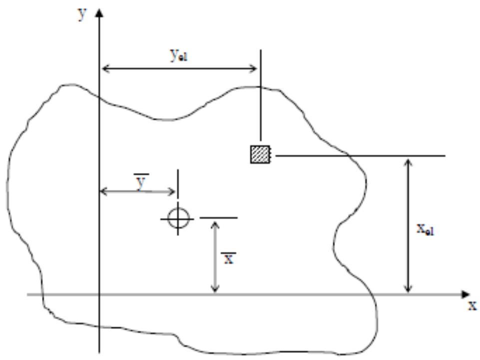


6. FORÇAS DISTRIBUÍDAS: CENTRÓIDES E BARICENTROS

6.1 – Introdução e Momento Estático de 1ª ordem

Freqüentemente consideramos a força peso dos corpos como cargas concentradas atuando em um único ponto, quando na realidade o que se passa é que o peso é uma força distribuída, isto é, cada pequena porção de matéria tem o seu próprio peso. Esta simplificação pode ser feita se aplicarmos a força concentrada num ponto especial denominado Baricentro. Este ponto deve ter uma distribuição de matéria homogênea em torno de si. Terá importância também a determinação de um ponto de uma superfície e não somente de um corpo tridimensional que terá uma distribuição homogênea de área em torno de si. A este ponto especial chamaremos de Centróide (ou Centro de Gravidade – CG).

Demonstra-se que as coordenadas deste ponto serão obtidas, no caso geral, tomando-se um elemento de área dA e partindo do centróide deste elemento (x_{el}; y_{el}) fazemos a integração em toda a área A.



As coordenadas deste ponto serão:

$$\overline{x} = \frac{\int x_{el} \cdot dA}{\int dA} \qquad \overline{y} = \frac{\int y_{el} \cdot dA}{\int dA}$$

A integral ∫xdA é conhecida como **<u>Momento Estático de 1ª Ordem</u>** ou **<u>Momento Estático de Área em relação ao eixo y</u>**. Analogamente, a integral ∫ydA define o **<u>Momento Estático de 1ª Ordem</u>** ou **<u>Momento Estático de Área em relação ao eixo x</u>**. Em suma o Momento Estático é definido como o produto da área do elemento por sua ordenada em relação ao eixo considerado.

Logo:

$$Q_x = \int_A y.dA \text{ e } Q_y = \int_A x.dA$$

6.2 – Determinação do centróide

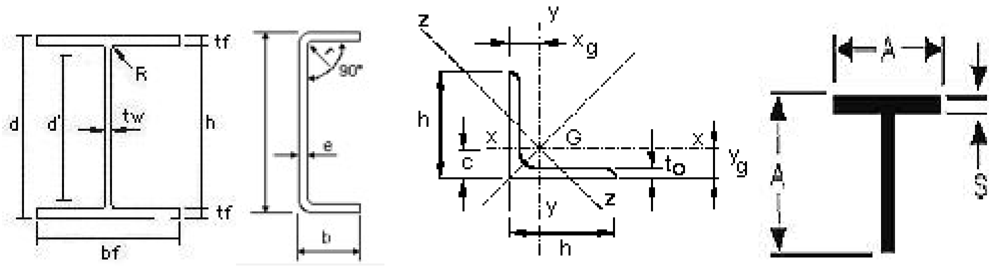
No caso de uma placa homogênea de espessura uniforme, o baricentro da placa coincide com o centróide da superfície da placa, cujas coordenadas são determinadas pelas equações

$$\bar{x}A = \int x.dA \;\text{ e }\; \bar{y}A = \int y.dA$$

A localização de alguns centróides é especificada parcial ou totalmente pelas condições de simetria:

- **1 eixo de simetria**: centróide localiza-se ao longo daquele eixo.
- **2 eixos de simetria**: centróide localiza-se na interseção desses eixos.

Exemplos de seções utilizadas na engenharia: retangular, quadrada, perfil I, T, L, C, Z, tubo, cruz, etc.



As áreas compostas devem ser divididas em partes mais simples. Se as áreas forem bem definidas e a localização do centróide conhecida, as integrais tornam-se somatórios e podem-se utilizar as formulações:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

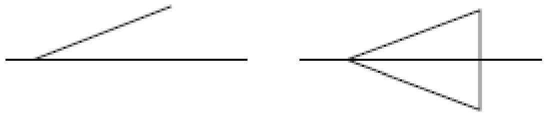
Estas são as coordenadas do centróide da área em relação ao sistema de eixos considerado. A partir da formulação acima, pode-se dizer que:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} y_i A_i \qquad Q_y = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$$

6.3 – Aplicações do cálculo do centro de gravidade

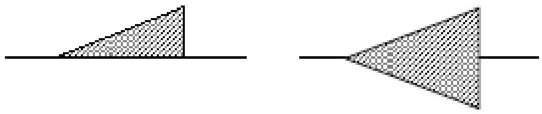
Teoremas de **Pappus-Guldin**: para a aplicação dos teoremas torna-se necessário definirmos:

Superfície de revolução: é uma superfície que pode ser gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo dado.



Curva plana (reta) Superfície de revolução – casca do cone

Corpo de revolução: é um corpo que pode ser gerado pela rotação de uma área plana em torno de um eixo fixo.



Área plana (triângulo) Corpo (cone)

Teorema I: a área de uma superfície de revolução é igual ao comprimento da curva geratriz (qualquer segmento de linha que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base deste), multiplicada pela distância percorrida pelo centróide da curva durante a geração da superfície.

Teorema II: o volume de um corpo de revolução é igual à área geratriz, multiplicada pela distância percorrida pelo centróide da área durante a geração do corpo.

6.4 – Centróide de um corpo tridimensional

Analogamente ao que foi feito para áreas planas, a determinação do Centróide de um corpo tridimensional pode ser obtida pelas expressões:

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dV}{\int dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dV}{\int dV} \qquad e \qquad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dV}{\int dV}$$

Para corpos homogêneos, isto é, os que possuem peso específico constante, o centróide coincide com o baricentro. Relembremos que centróide é um ponto com distribuição de volume homogênea em torno de si (do ponto de vista geométrico) e baricentro é um ponto com distribuição homogênea de massa em torno de si (ponto onde deve situar a força peso, que sozinha substitui o peso distribuído de cada porção de matéria).

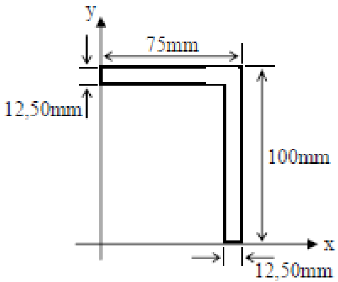
A integral $\int x \cdot dV$ é conhecida como Momento Estático ou Momento de Primeira Ordem de Volume em relação ao plano yz. Analogamente, $\int y \cdot dV$ com em relação a xz e

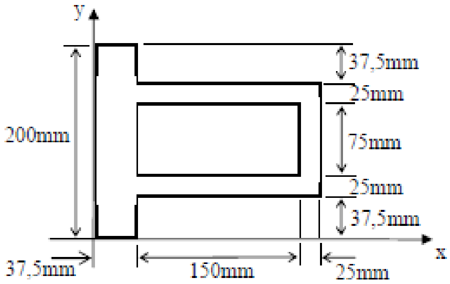
$\int z \cdot dV$ em relação a xy.

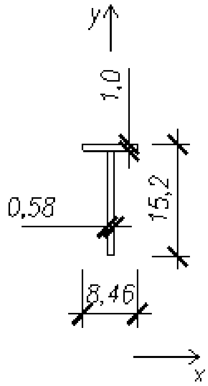
No cálculo de centróide de áreas pudemos observar que figuras com eixo de simetria possuíam o CG sobre este eixo. O mesmo se aplica para o CG de corpos tridimensionais. Desta forma é imediato o CG de esferas, elipsóides, cubos, paralelepípedos, etc.

Exercícios

Determinar os centros de gravidade das áreas abaixo:



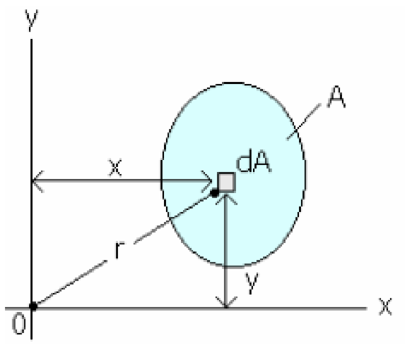




(em centímetros)

6.5 – Momento de Inércia e Momento Polar de Inércia de uma área

O Momento de 2ª ordem ou Momento de Inércia é definido como a integral de um elemento de área pelo quadrado de sua distância a um eixo considerado.



Pela figura anterior, os momentos de inércia de um elemento infinitesimal de área dA em torno dos eixos x' e y' são, respectivamente:

$$dI_{x'} = y^2 dA \qquad \text{e} \qquad dI_{y'} = x^2 dA$$

Generalizando para a área A:

$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad \text{e} \qquad I_y = \int_A x^2 dA$$

Neste caso, Iy é o Momento de Inércia em torno do eixo y e Ix o Momento de Inércia em torno do eixo x.

Pode-se ainda expressar o momento de 2ª ordem em torno do pólo O (ou eixo z) para a figura anterior. Este momento é chamado Momento de Inércia Polar, dado por:

$$J_O = \int_A r^2 \, dA$$

onde r é a distância perpendicular do pólo (eixo z) ao elemento *d*A.
Mas $r^2 = x^2 + y^2$. Então:

$$J_O = \int_A (x^2 + y^2)\, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA = I_y + I_x$$

Dedução para o círculo:

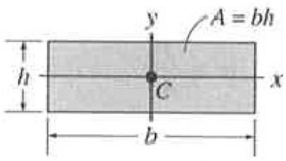
- Área: $A = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r \, dr \, d\theta$

- Inércia em x : $I_{x'} = \int_A y^2 dA$

- $I_{x'} = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r (r \sin\theta)^2 dr \, d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0..r} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\theta=0..2\pi} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$

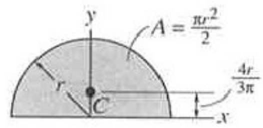
Raciocínio análogo para o eixo y.

<u>Momentos de inércia para algumas seções planas</u>



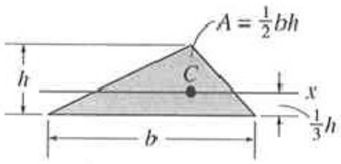
Área retangular

$I_x = \frac{1}{12} b h^3$
$I_y = \frac{1}{12} h b^3$



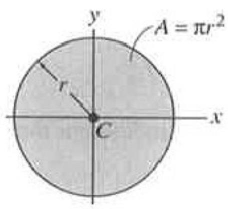
Área semicircular

$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$
$I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$



Área triangular

$I_x = \frac{1}{36} b h^3$

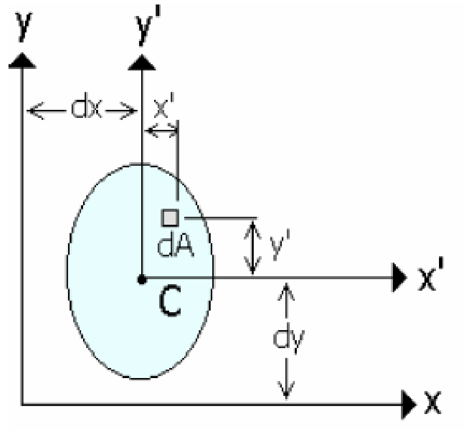


Área circular

$I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$
$I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$

6.6 – Teorema dos Eixos Paralelos para os Momentos de Inércia (Teorema de Steiner)

Se o momento de inércia de uma área em torno do eixo do centróide for conhecido, pode-se determinar o momento de inércia dessa área em torno de um eixo paralelo correspondente (Teorema de Steiner ou Teorema dos Eixos Paralelos). Seja o momento de inércia em x da área sombreada abaixo.



O elemento *dA* localiza-se a uma distância y' do eixo x' do centróide, enquanto que a distância fixa entre os eixos paralelos x e x' é definida com *dy*. Como o momento de inércia de *dA* em torno de x é $dI_x = (y' + d_y)^2\, dA$, então para a área completa tem-se:

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2 dA = \int_A (y')^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + (d_y)^2 \int_A dA$$

O termo do meio ao lado direito da equação é nulo, visto que o eixo *x* passa pelo centróide *C*. Então, o momento de inércia em relação ao eixo x fica:

$$I_x = I_x' + Ad_y^2$$

Analogamente:

$$I_y = I_y' + A_{yx}^2$$

Quando se tem uma seção transversal que pode ser decomposta em áreas mais simples e cujo momento de inércia seja conhecido, o momento de inércia da área composta pode ser determinado através da soma algébrica dos momentos de inércia de cada uma de suas partes.

6.7 – Produto de Inércia

Define-se Produto de Inércia como:

$$I_{xy} = \int_A xydA$$

O produto de Inércia pode ser positivo, negativo ou nulo. Seu sinal depende dos valores de *x* e *y,* conforme a localização e a orientação dos eixos coordenados. Se I_{xy} = 0, a seção terá pelo menos 1 eixo de simetria. O Teorema dos Eixos Paralelos para o produto de inércia fica:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Ad_x d_y$$

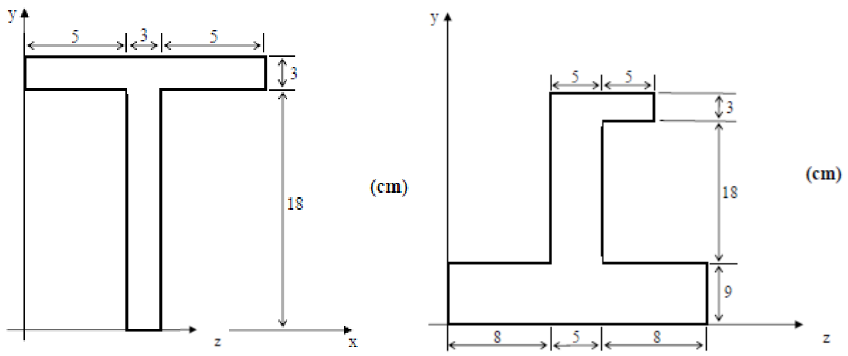
Eixos principais de inércia são eixos em torno dos quais os momentos de inércia são máximos e mínimos. A expressão para o cálculo desses momentos de inércia é dada por:

$$I_{máx,mín} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 - I_{xy}{}^2}$$

Se $I_{xy} = 0$, $I_{máx} = I_x$ e $I_{min} = I_y$. Logo, qualquer eixo simétrico representa um eixo principal de inércia da área.

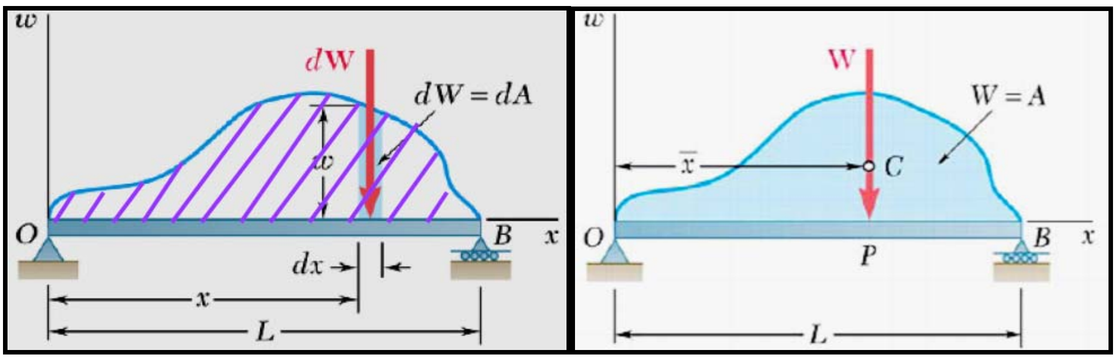
Exercícios

Determinar os valores de I_x e I_z para as seções transversais abaixo:



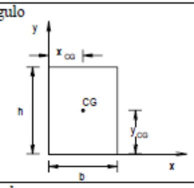
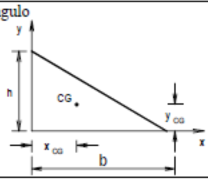
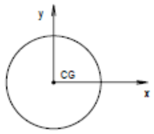
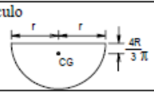
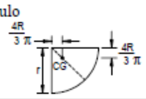
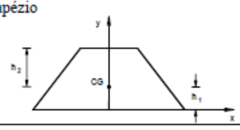
6.8 – Cargas Distribuídas

O conceito do centróide pode ser utilizado para resolver outros problemas não relacionados com o peso de placas planas. Por exemplo, para determinar as reações nos apoios de uma viga, podemos substituir uma carga distribuída w por uma carga única W de módulo igual a área sob a curva da carga. A mesma sistemática pode ser utilizada para determinar a resultante das forças hidrostáticas exercidas sobre uma placa retangular submersa em um líquido.

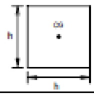
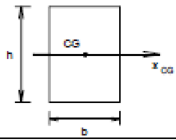
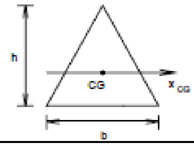
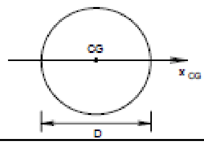
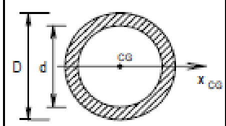


6.9 – Tabelas de centro de gravidade e Momento de Inércia

Centro de gravidade

retângulo 	$x_{CG} = \frac{b}{2}$ $y_{CG} = \frac{h}{2}$
triângulo 	$x_{CG} = \frac{b}{3}$ $y_{CG} = \frac{h}{3}$
círculo 	$x_{CG} = 0$ $y_{CG} = 0$
Semicírculo 	$y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$
¼ de círculo 	$x_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$ $y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$
trapézio 	$h_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ $h_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$

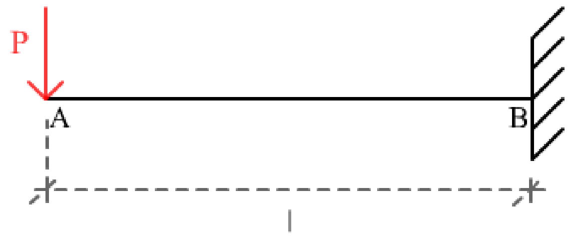
Momento de Inércia

Quadrado 	$I_x = \frac{h^4}{12}$
Retângulo 	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{12}$
Triângulo 	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{36}$
Círculo 	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi d^4}{64}$
Círculo vazado 	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}$

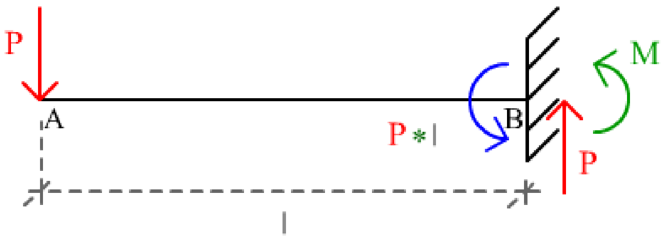
7. DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Os diagramas de esforços solicitantes representam graficamente como cada um dos esforços solicitantes varia ao longo de uma estrutura qualquer.

Para obtermos estes esforços em uma seção transversal de uma barra, utilizamos o teorema fundamental, ou teorema do corte. Os esforços solicitantes que atuam em uma seção genérica, caracterizada por sua abscissa x, podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e nela reduzindo todos os esforços externos aplicados à sua esquerda ou então todos os esforços externos aplicados à sua direita, após é claro, de se definir todos os vínculos e/ou restrições da estrutura analisada.



Aplicação da força externa P

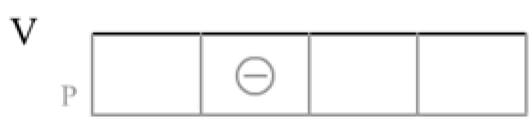


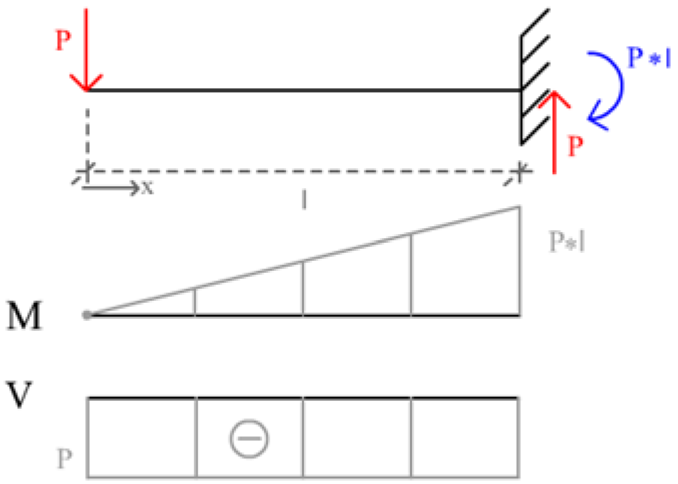
Cálculo das reações de apoio no engastamento

$\Sigma Y=0 \qquad Y_B=P$

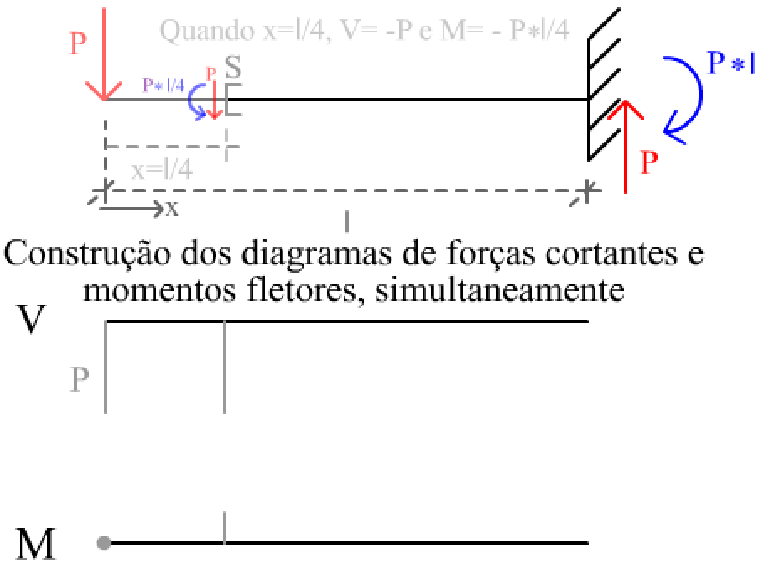
$(\Sigma M)_B=0 \qquad M_B=-(P*l)$

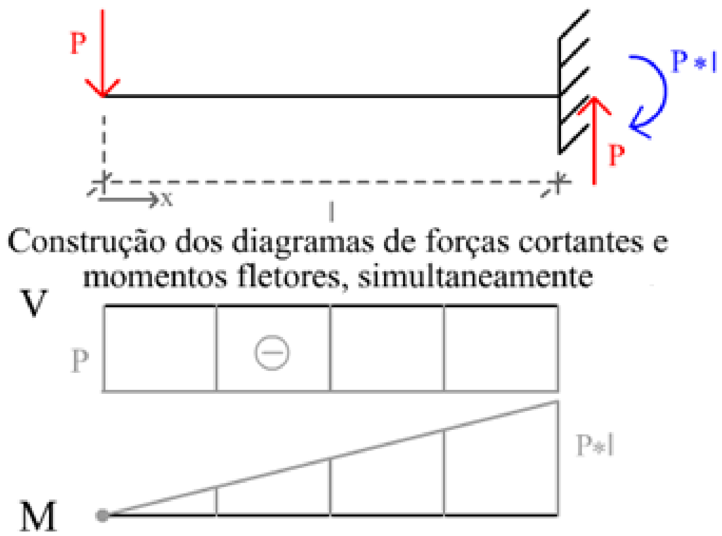
Construção do diagrama de forças cortantes





Na prática construímos os diagramas de esforços solicitantes simultaneamente, observando todos os esforços em cada seção estudada.





8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Beer, Ferdinand P. e Johnston, E. Russell Jr, **Mecânica Vetorial para Engenheiros**. Editora Makron Books, 5ª Edição.
2. Hibbeler, R.C., **Resistência dos Materiais**. Editora Prentice-Hall, 5ª Edição.
3. Lages, Eduardo Nobre, **Notas de Aula - Mecânica dos sólidos**. Universidade Federal de Alagoas.
4. Fernandes, William Luiz, **Notas de Aula - Resistência dos Materiais I**. Instituto Newton de Paiva.
5. Apostila II, **Resistência dos Materiais**. Matemática – Série Concursos Públicos – Curso Prático & Objetivo.
6. Apostila, **Mecânica Geral I**. UNIBAHIA, Salvador, 2007.